



# Le TAMBOUR et la ROUILLE

Semaine des maths  
LAMPS - PPCM  
10 mars 2023

Damien Gayet  
Institut Fourier  
Université Grenoble Alpes

# Introduction

## Petits jeux

# Jeu numéro 1

Quel est le point commun entre  
les quatre images qui vont suivre ?

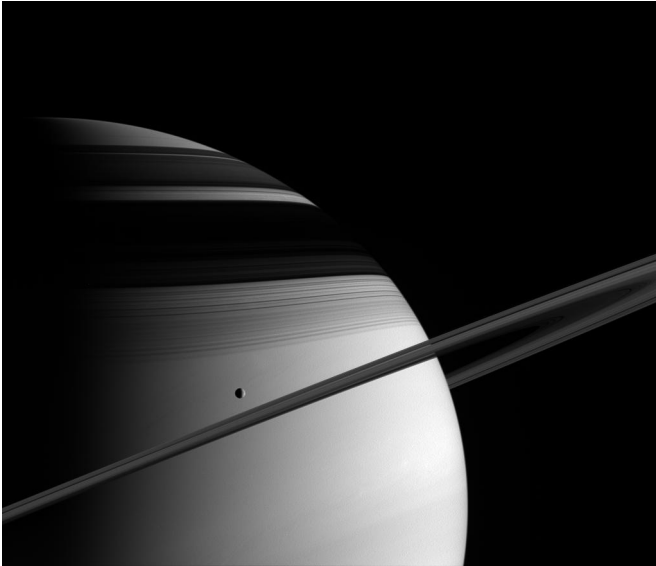








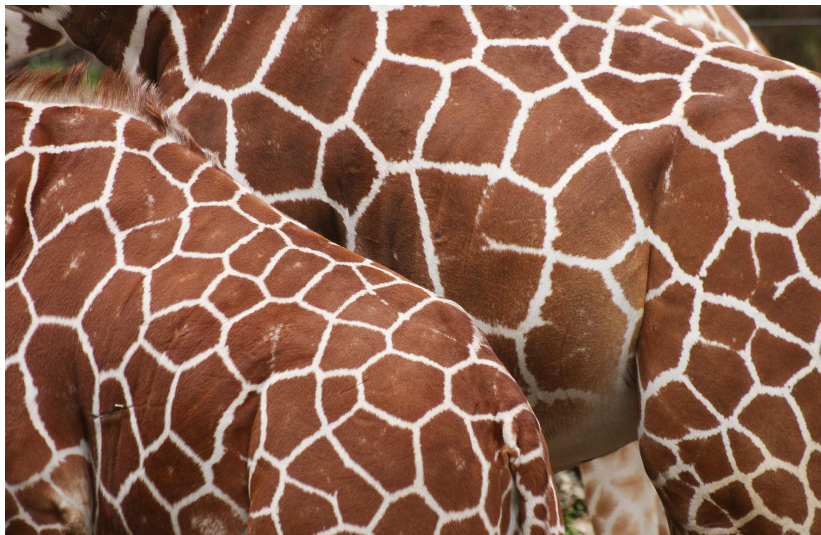
Hasani (né en mai 2019)

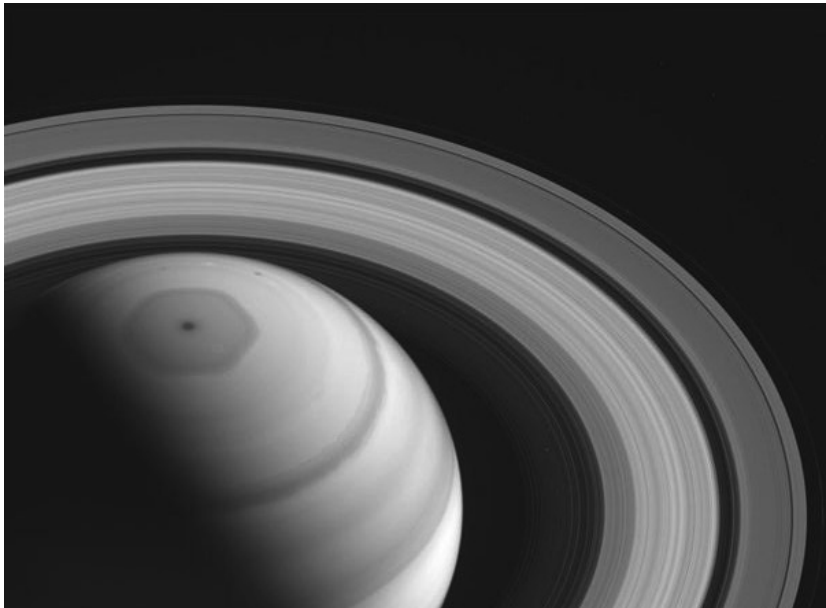






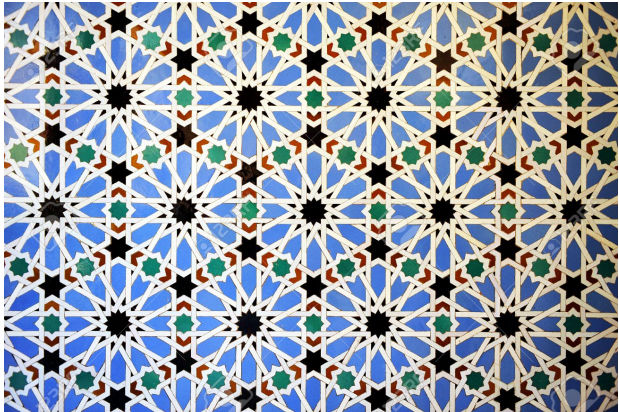
















## $C_{60}$ : Buckminsterfullerene

H. W. Kroto\*, J. R. Heath, S. C. O'Brien, R. F. Curl  
& R. E. Smalley

Rice Quantum Institute and Departments of Chemistry and Electrical Engineering, Rice University, Houston, Texas 77251, USA

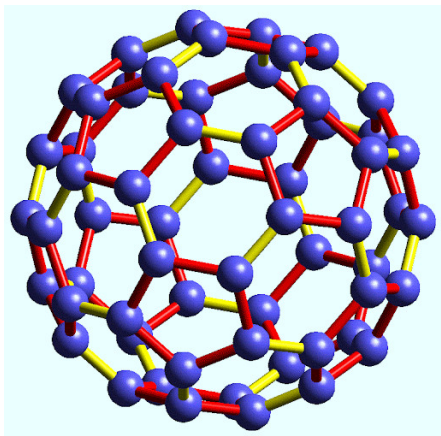
During experiments aimed at understanding the mechanisms by which long-chain carbon molecules are formed in interstellar space and circumstellar shells<sup>1</sup>, graphite has been vaporized by laser irradiation, producing a remarkably stable cluster consisting of 60 carbon atoms. Concerning the question of what kind of 60-carbon atom structure might give rise to a superstable species, we suggest a truncated icosahedron, a polygon with 60 vertices and 32 faces, 12 of which are pentagonal and 20 hexagonal. This object is commonly encountered as the football shown in Fig. 1. The  $C_{60}$  molecule which results when a carbon atom is placed at each vertex of this structure has all valences satisfied by two single bonds and one double bond, has many resonance structures, and appears to be aromatic.

Fig. 1 A football (in the United States, a soccerball) on Texas grass. The  $C_{60}$  molecule featured in this letter is suggested to have the truncated icosahedral structure formed by replacing each vertex on the seams of such a ball by a carbon atom.



graphite fused six-membered ring structure. We believe that the distribution in Fig. 3c is fairly representative of the nascent distribution of larger ring fragments. When these hot ring clusters are left in contact with high-density helium, the clusters equilibrate by two- and three-body collisions towards the most stable species, which appears to be a unique cluster containing 60 atoms.

When one thinks in terms of the many fused-ring isomers with unsatisfied valences at the edges that would naturally arise

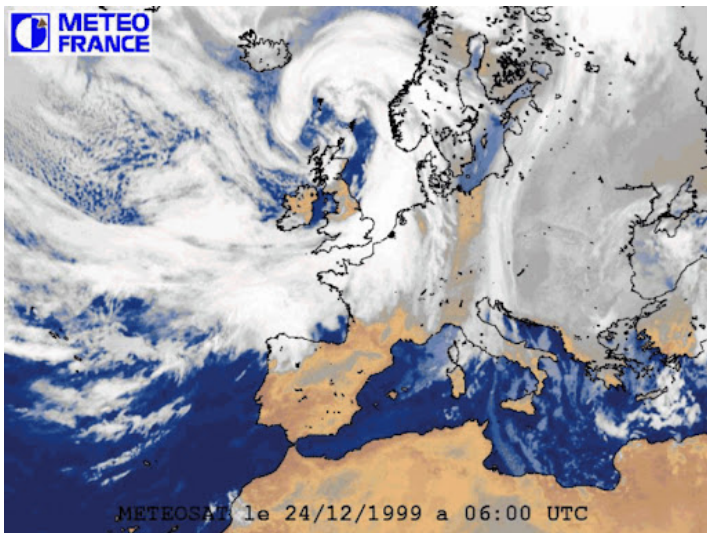


## Jeu numéro 2

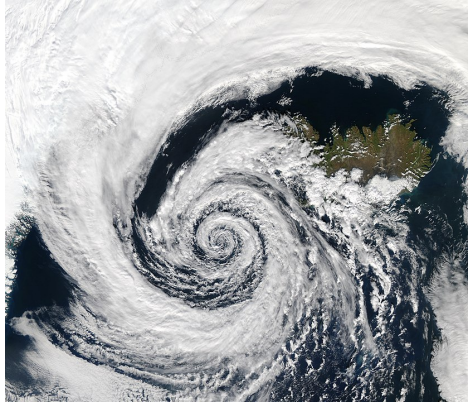
Quel est le point commun entre  
les trois images qui vont suivre?







METEOSAT le 24/12/1999 a 06:00 UTC









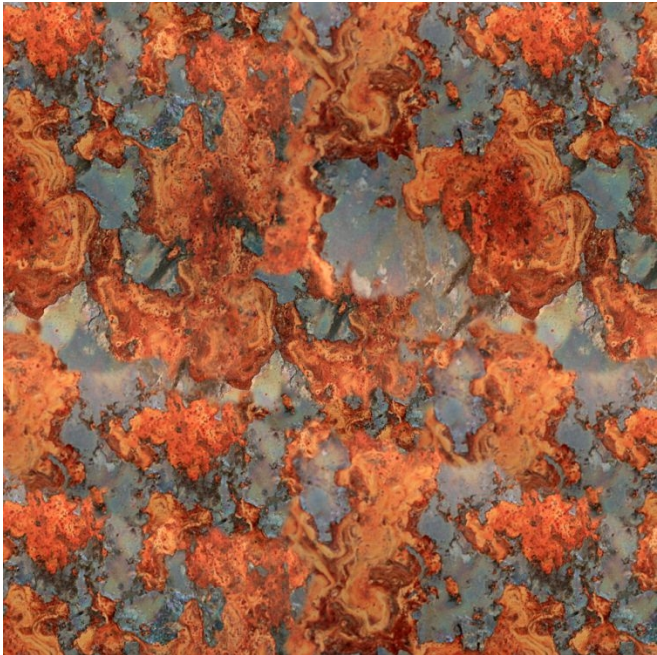
*La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.*

Henri Poincaré 1908.

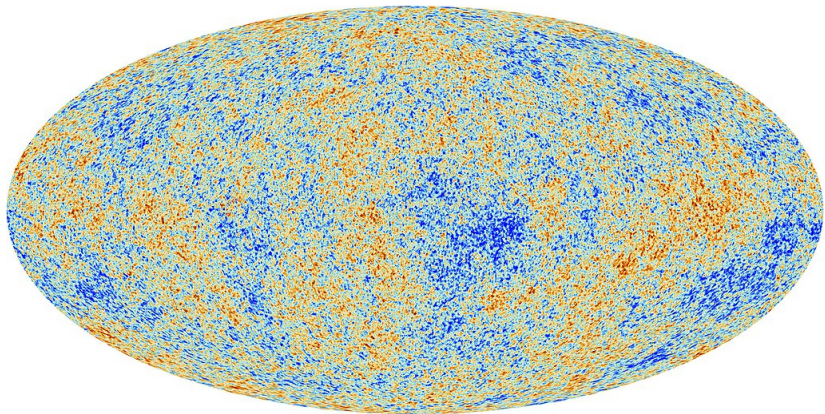
## Jeu numéro 3

Quel est le point commun entre  
les quatre images qui vont suivre ?











*Maintenant, qu'est-ce que la science ? [...] c'est avant tout [...] une façon de rapprocher des faits que les apparences séparaient, bien qu'ils fussent liés par quelque parenté naturelle et cachée.*

Henri Poincaré 1905

# Partie 1

## Le tambour

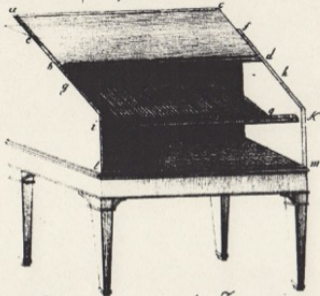






Ernst Florens Friedrich Chladni (1757-1827)

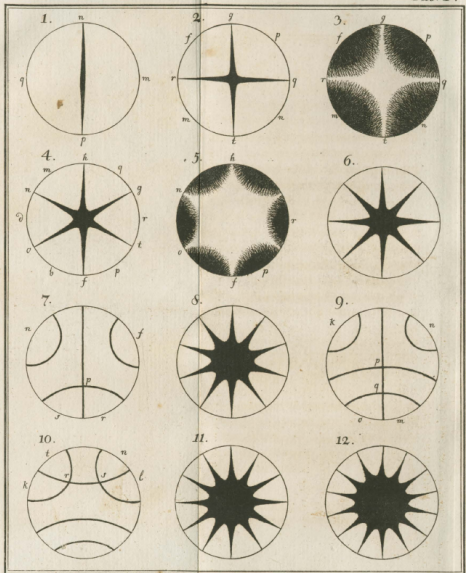
# Euphon

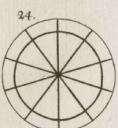
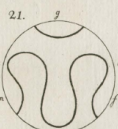
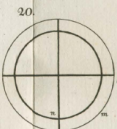
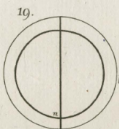
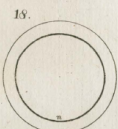
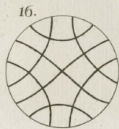
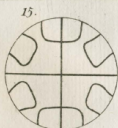
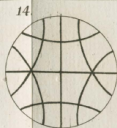
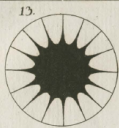


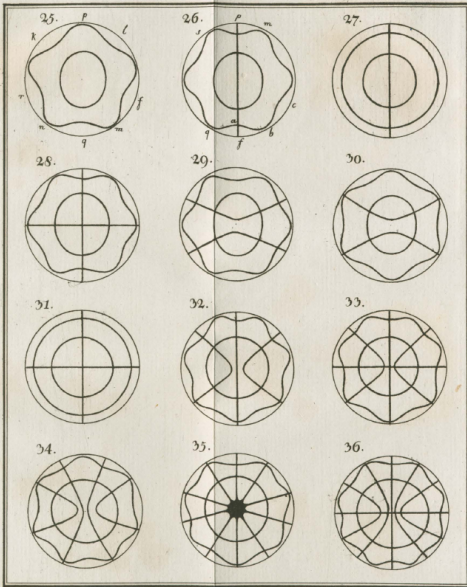
Erfinden den 2<sup>ten</sup> Jun. 1789.  
Zu stände gebracht d. 8<sup>ten</sup> März 1790.

1790

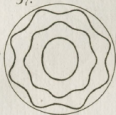
D<sup>r</sup> Chladeni in Wittenberg.







37.



38.



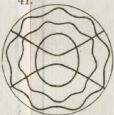
39.



40.



41.



42.



43.



44.



45.



46.



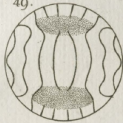
47.



48.



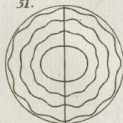
49.



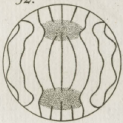
50.



51.



52.



53.



54.



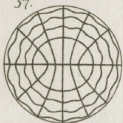
55.



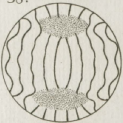
56.



57.



58.

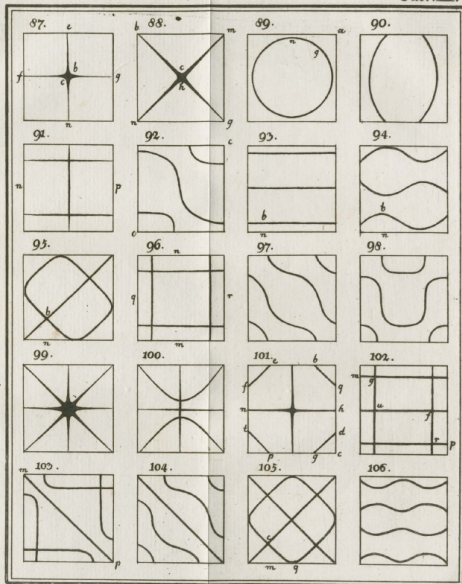


59.



60.







107.

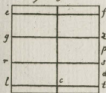


P

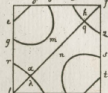
108.



109. b



110.



111.



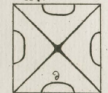
112.



113.



114.



115.



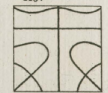
116.



117.



118.



119.



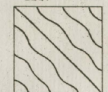
120.



121.



122.



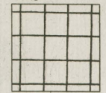
123.



124.



125.



126.



127.



128.



129. a



130.



131.



132.



133.



134.



135.



136.



137.



138.



139.



140.



141.



142.



143.



144.

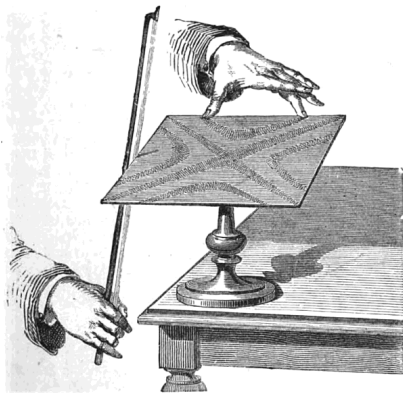


145.



146.





*Vidéo*





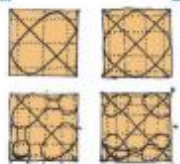


- ▶ 1806 : Prix de 3000 francs pour une théorie mathématique des figures de Chladni.
- ▶ 1816 : Prix gagné par...

FRANCE

0,70 €

*Chère*



*Soit p premier impair  
Tel que  $2p + 1 \in P$ . Alors  
 $x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow p \mid xyz$*



SOPHIE  
GERMAIN  
1776-1831



La Poste 2016



Dans les cas de vibrations compris dans cette intégrale, les lignes d'extrémités courbes et les lignes d'extrémités droites sont les unes et les autres physiquement libres, cependant elles sont dans un état analytiquement différent.

En effet, les lignes d'extrémités courbes satisfont aux conditions

$$-SN^2\left(\frac{d^2r}{dx^{n_2}} + \frac{d^2r}{ds^2}\right)\delta\left(\frac{dr}{dx^n}\right)ds + SN^2d\left(\frac{\frac{d^2r}{dx^{n_2}} + \frac{d^2r}{ds^2}}{dx^n}\right)\delta r ds \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = 0;$$

$$+S\frac{N^2}{a^2}\left(\frac{d^2r}{dx^{n_2}} + \frac{d^2r}{ds^2}\right)\left(\frac{dr}{dx^n}\right)\delta r ds$$

$$-SN^2\left(\frac{d^2r}{dx^{n_2}} + \frac{d^2r}{ds^2}\right)\delta\left(\frac{dr}{ds}\right)dx + SN^2d\left(\frac{\frac{d^2r}{dx^{n_2}} + \frac{d^2r}{ds^2}}{ds}\right)\delta r dx \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = 0;$$

$$+S\frac{N^2}{a^2}\left(\frac{d^2r}{dx^{n_2}} + \frac{d^2r}{ds^2}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)\delta r dx$$

en vertu des équations  $dx = 0$ ,  $\left(\frac{dr}{dx^n}\right) = 0$ , et  $d\left(\frac{\frac{d^2r}{dx^{n_2}} + \frac{d^2r}{ds^2}}{dx^n}\right) = 0$ ;  
tandis que pour les lignes d'extrémités droites, ce sont les équations

E. Tartaglino - A. Filippini - A. Ferrari

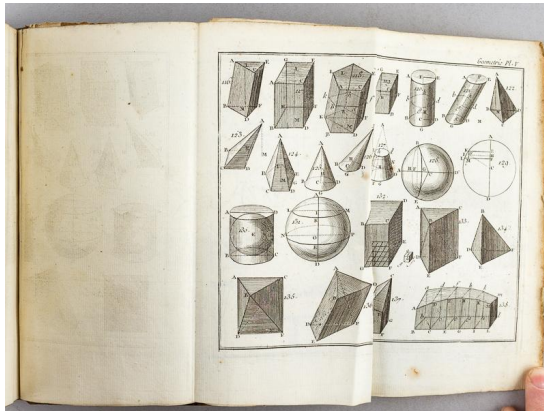
Les audaces de

# SOPHIE GERMAIN

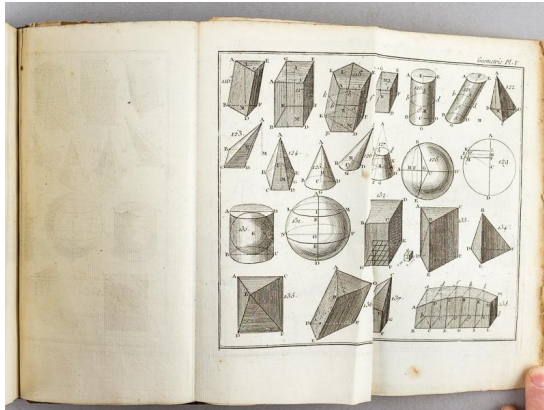




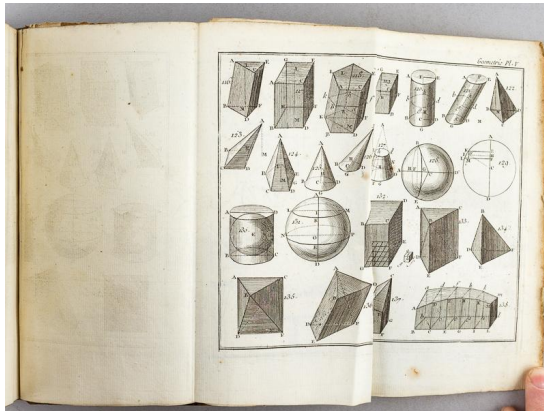
- ▶ Née à Paris en 1776 dans une famille aisée et cultivée
- ▶ Père commerçant en soie et tissus, député de la Constituante de 1789 à 1791



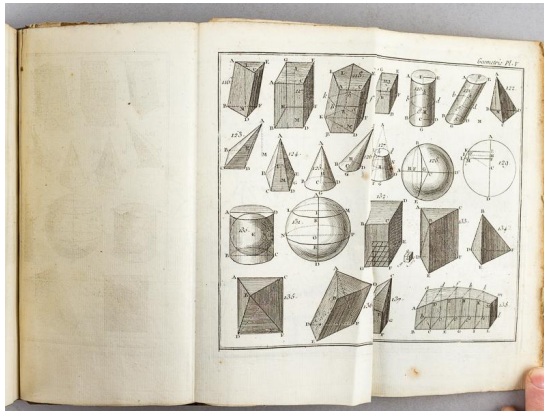
- ▶ Une véritable bibliothèque avec des livres de mathématiques



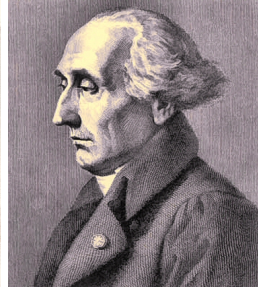
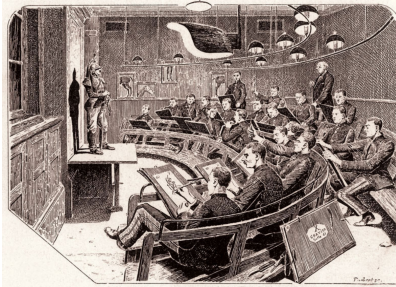
- ▶ Une véritable bibliothèque avec des livres de mathématiques
- ▶ Son père lui cache les bougies pour qu'elle arrête de travailler les mathématiques...



- ▶ Une véritable bibliothèque avec des livres de mathématiques
- ▶ Son père lui cache les bougies pour qu'elle arrête de travailler les mathématiques... puis finit par céder et la laisse apprendre en toute liberté.



- ▶ Une véritable bibliothèque avec des livres de mathématiques
- ▶ Son père lui cache les bougies pour qu'elle arrête de travailler les mathématiques... puis finit par céder et la laisse apprendre en toute liberté.



- ▶ Sous un nom d'homme (Leblanc), elle récupère des cours de l'École polytechnique.
- ▶ Échange avec le mathématicien Joseph Lagrange.



PHILOSOPHIE MODERNE

ŒUVRES PHILOSOPHIQUES

DE

**SOPHIE GERMAIN**

SUIVIES

DE PENSÉES ET DE LETTRES INÉDITES

ET PRÉCÉDÉES

D'UNE ÉTUDE SUR SA VIE ET SES ŒUVRES

PAR

H<sup>ic</sup> STUPUY

NOUVELLE ÉDITION

PARIS

LIBRAIRIE DE FIRMIN-DIDOT ET C<sup>ie</sup>

IMPRIMEURS DE L'INSTITUT, RUE JACOB, 56

1896

\*  
\* \*

La grande supériorité n'est que le moyen de considérer les choses difficiles sous un point de vue où elles deviennent faciles, où l'esprit les embrasse et les suit sans efforts.

\*  
\* \*

► Subit le sexisme de nombreux mathématiciens

PHILOSOPHIE MODERNE

ŒUVRES PHILOSOPHIQUES

DE

**SOPHIE GERMAIN**

SUIVIES

DE PENSÉES ET DE LETTRES INÉDITES

ET PRÉCÉDÉES

D'UNE ÉTUDE SUR SA VIE ET SES ŒUVRES

PAR

H<sup>ic</sup> STUPUY

NOUVELLE ÉDITION

PARIS

LIBRAIRIE DE FIRMIN-DIDOT ET C<sup>ie</sup>

IMPRIMERIE DE L'INSTITUT, RUE JACOB, 56

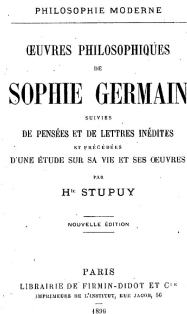
1896

\*  
\* \*

La grande supériorité n'est que le moyen de considérer les choses difficiles sous un point de vue où elles deviennent faciles, où l'esprit les embrasse et les suit sans efforts.

\*  
\* \*

- ▶ Subit le sexisme de nombreux mathématiciens
- ▶ Oeuvres philosophiques



\* \* \*

La grande supériorité n'est que le moyen de considérer les choses difficiles sous un point de vue où elles deviennent faciles, où l'esprit les embrasse et les suit sans efforts.

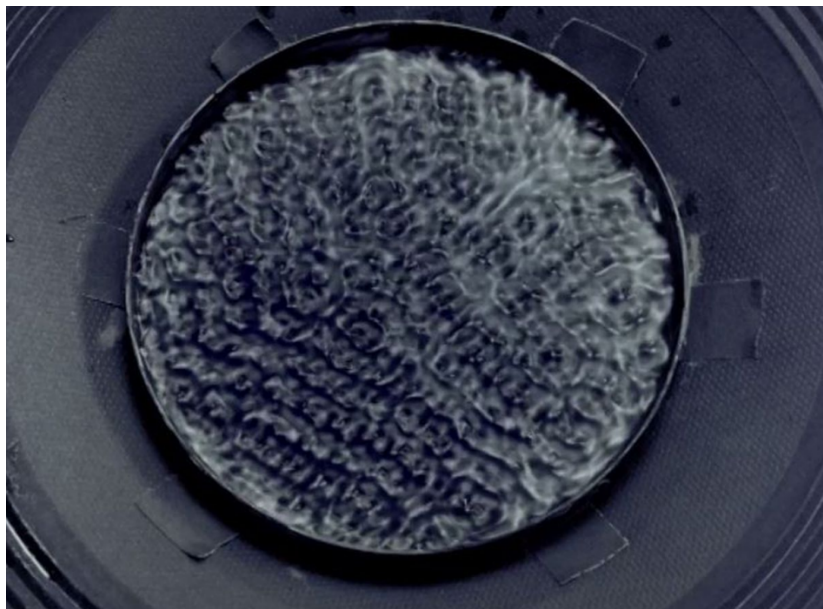
\* \* \*

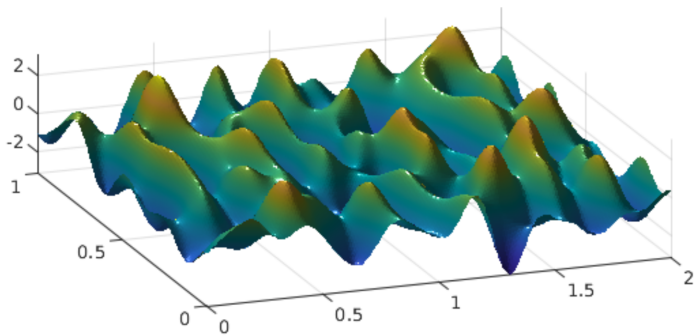
- ▶ Subit le sexisme de nombreux mathématiciens
- ▶ Oeuvres philosophiques
- ▶ Meurt d'un cancer du sein en 1831.



L'académicienne et Strasbourgeoise Nalini Anantharaman,  
spécialiste mondiale du *chaos quantique*  
(une théorie proche des figures de Chladni)





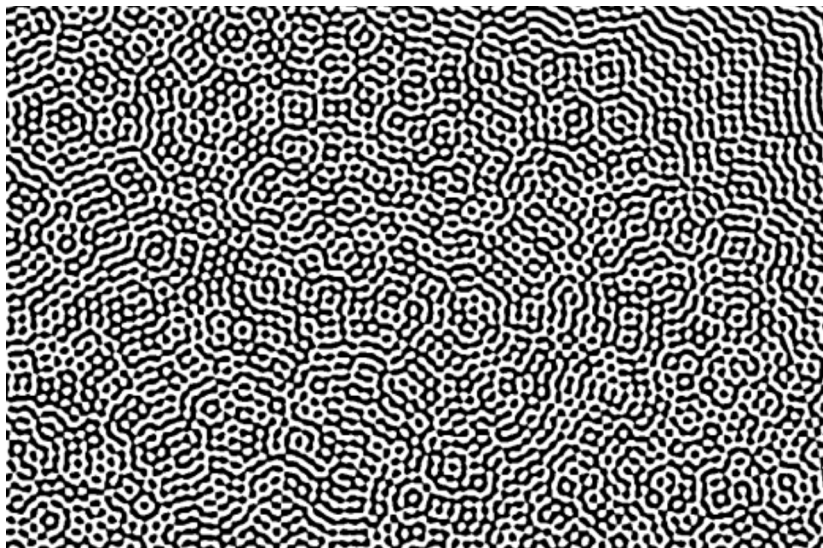




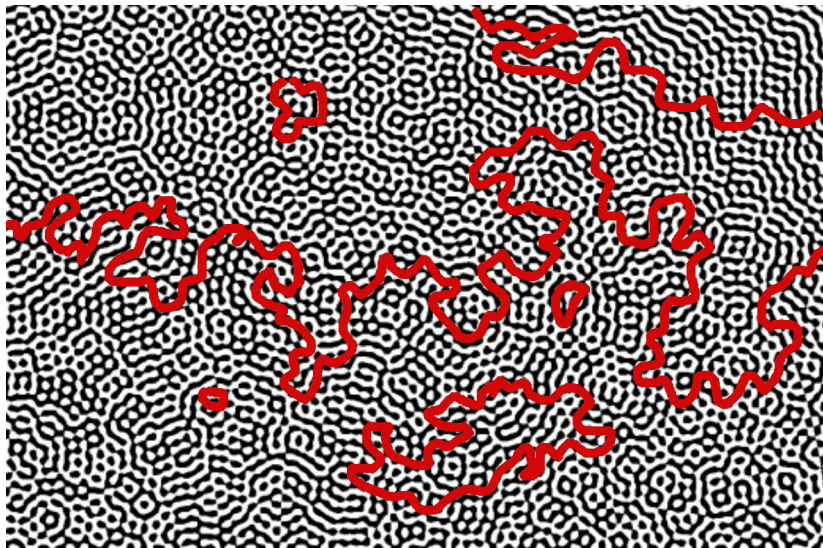




Figures de Chladni pour une onde aléatoire



Quelle est la forme de ces lignes nodale ?



# Partie 2

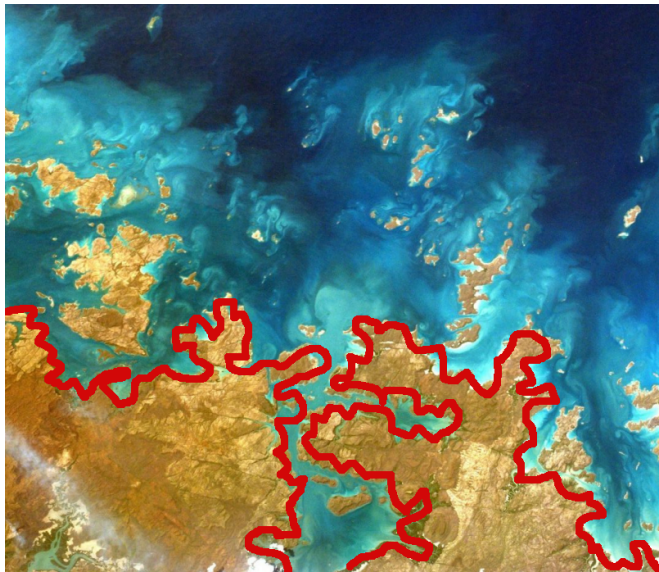
## La rouille













**PYRÉNÉES-ORIENTALES**

**SITES TOURISTIQUES**

- Sites inscrits au Patrimoine Mondial de l'UNESCO
- Sites inscrits au Patrimoine de France
- Sites inscrits au Patrimoine de la Région
- Sites inscrits au Patrimoine de la Communauté
- Sites inscrits au Patrimoine de la Vallée
- Sites inscrits au Patrimoine de la Montagne
- Sites inscrits au Patrimoine de la Mer
- Sites inscrits au Patrimoine de l'Europe
- Sites inscrits au Patrimoine de l'humanité

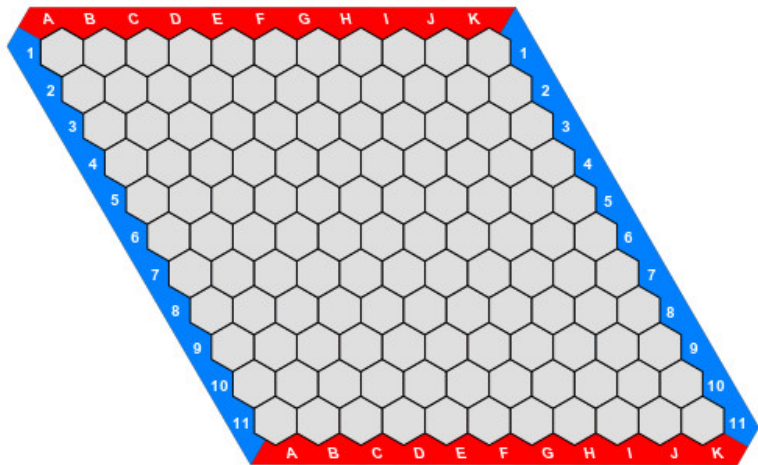
**SITES SPORTIFS RANDONNÉS**

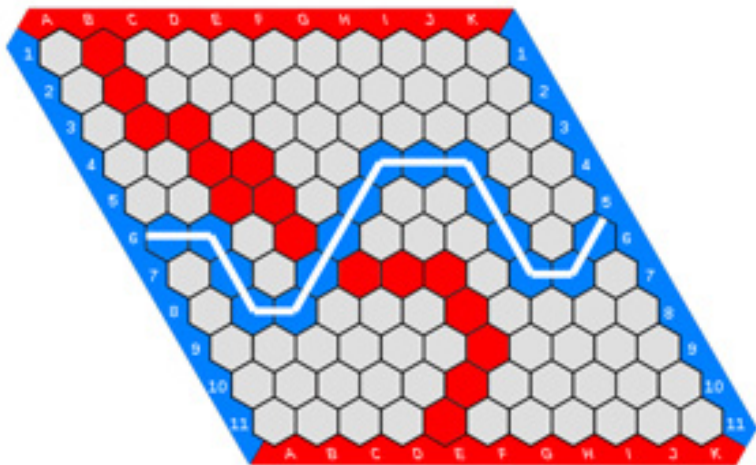
- Sites inscrits au Patrimoine Mondial de l'UNESCO
- Sites inscrits au Patrimoine de France
- Sites inscrits au Patrimoine de la Région
- Sites inscrits au Patrimoine de la Communauté
- Sites inscrits au Patrimoine de la Vallée
- Sites inscrits au Patrimoine de la Montagne
- Sites inscrits au Patrimoine de la Mer
- Sites inscrits au Patrimoine de l'Europe
- Sites inscrits au Patrimoine de l'humanité

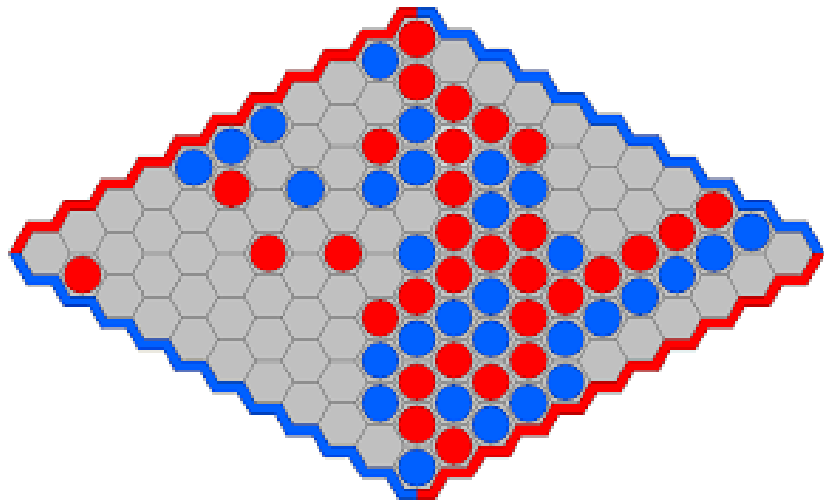
© IGN 2010

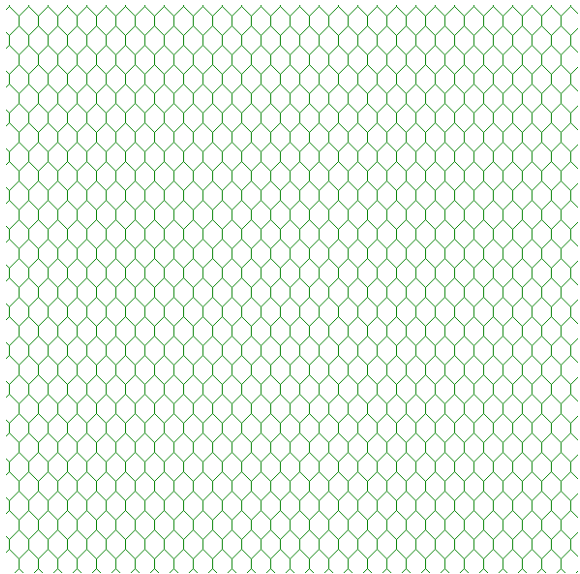




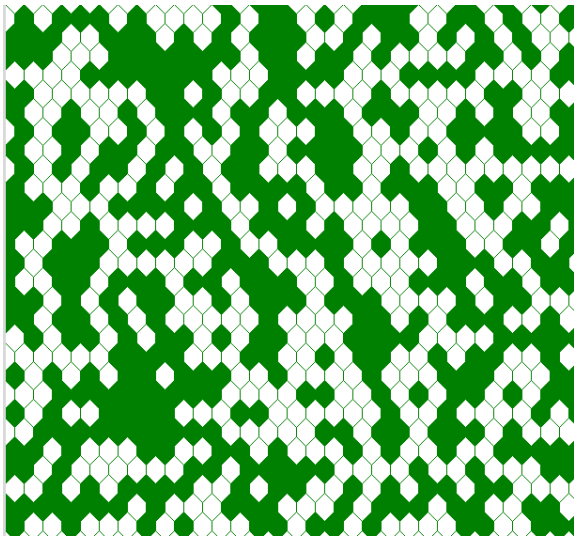


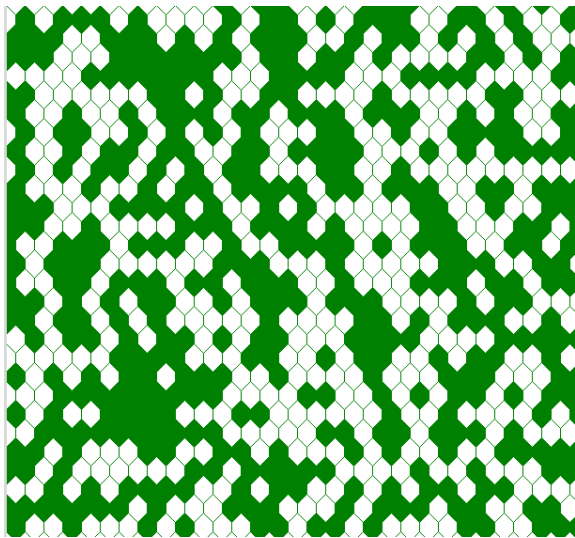






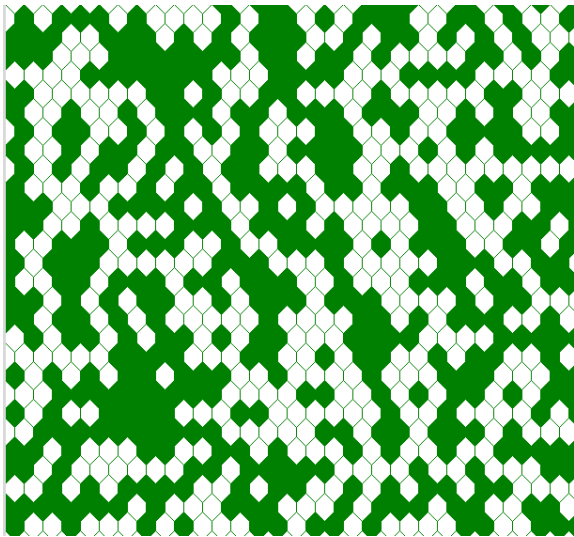
Case verte si pile, case blanche si face.





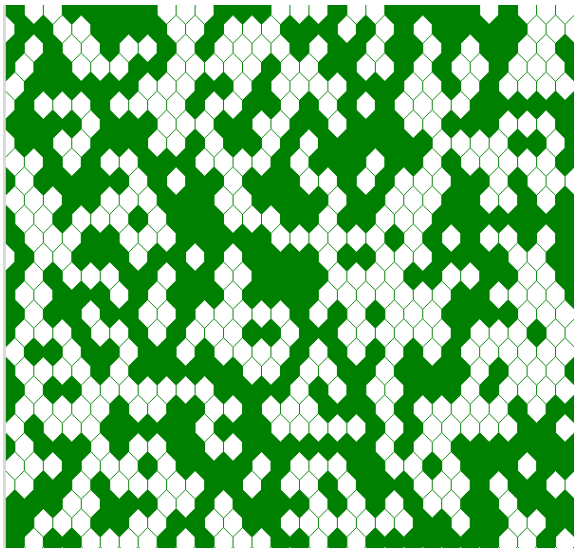
Jeu : pour gagner, blanc doit traverser horizontalement, vert verticalement.

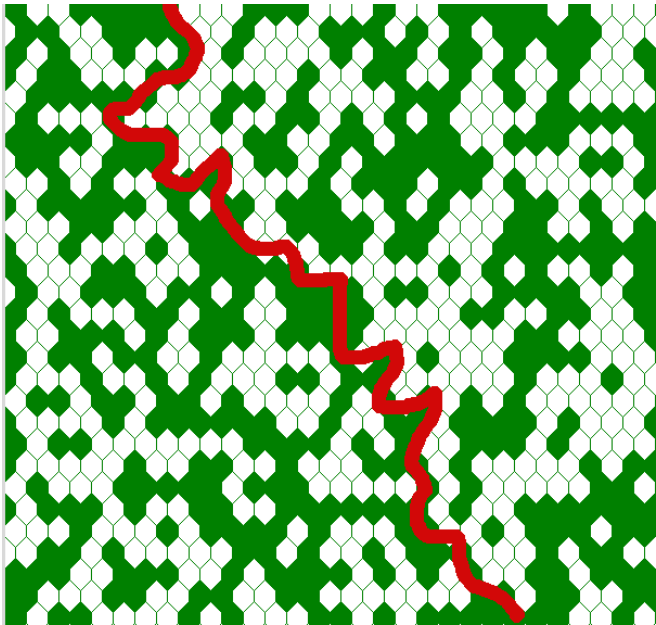




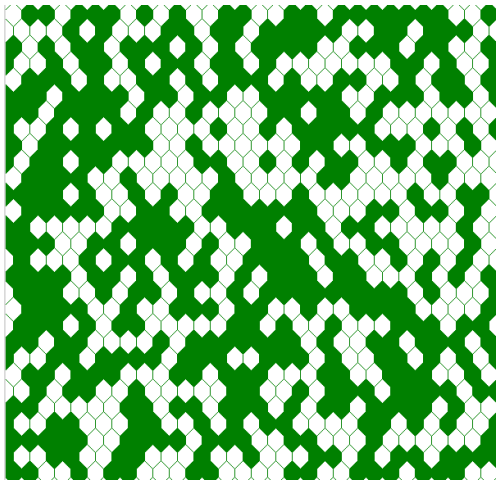
Jeu : pour gagner, blanc doit traverser horizontalement, vert  
verticalement.  
Qui a gagné?

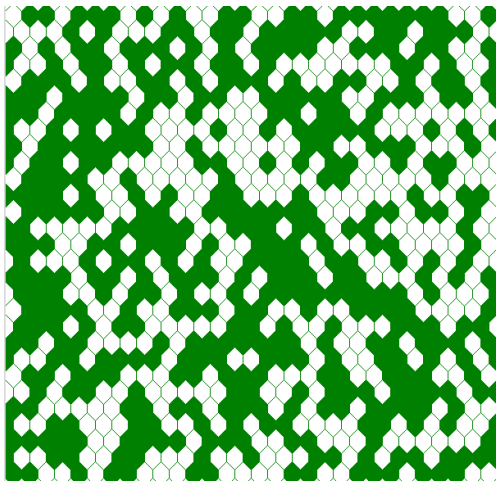




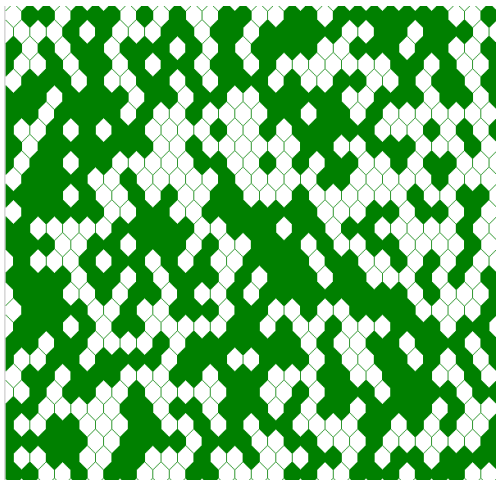


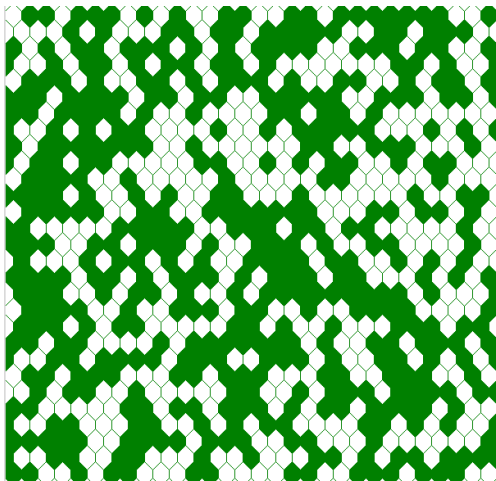
Vert a gagné!





**Jeu avec argent** : si vert passe, je gagne 2 euros.  
Si blanc passe, vous gagnez 1 euro. Jouez-vous avec moi ?

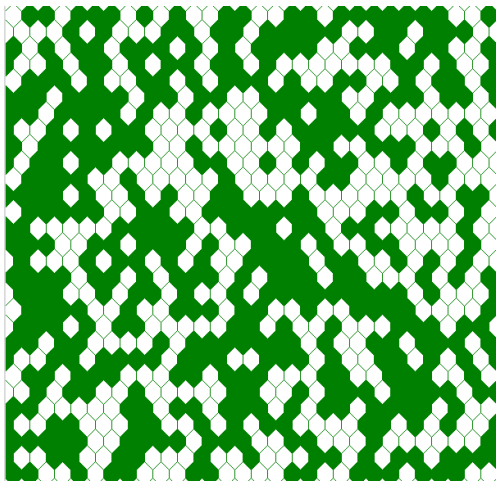




Quelle est le pourcentage de victoire de Vert?  
Quelle est le pourcentage de victoire de Blanc?

**Réponse :**

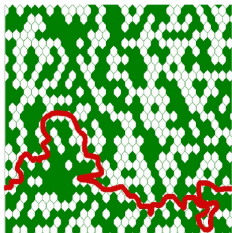




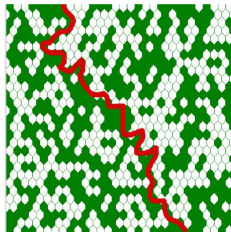
Quelle est le pourcentage de victoire de Vert?  
Quelle est le pourcentage de victoire de Blanc?

**Réponse :** 50% pour Vert et Blanc  
pour les deux. La probabilité de traverser horizontalement ou  
verticalement est  $1/2$ .

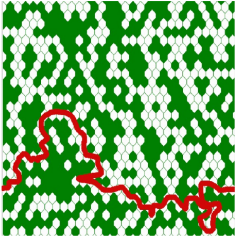
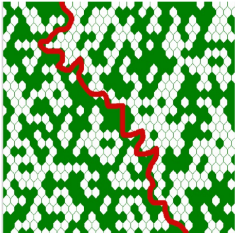
Probabilité (



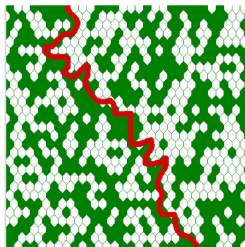
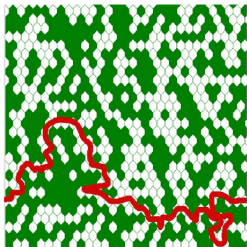
) + Proba (



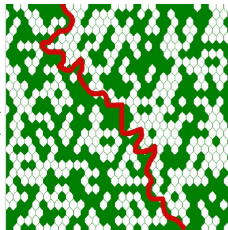
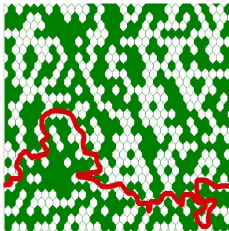
) = ?

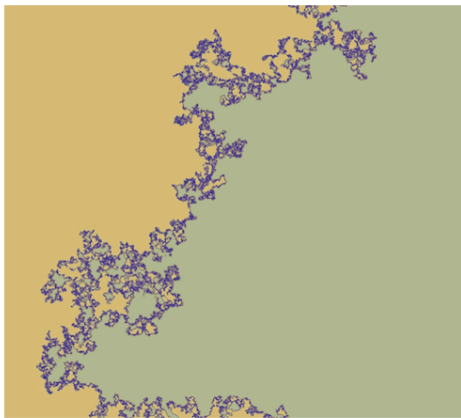
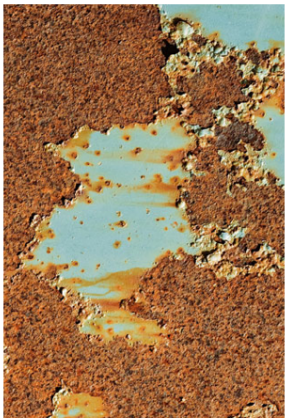
Probabilité (  ) + Proba (  ) = 1

Probabilité ( ) = Proba ( )

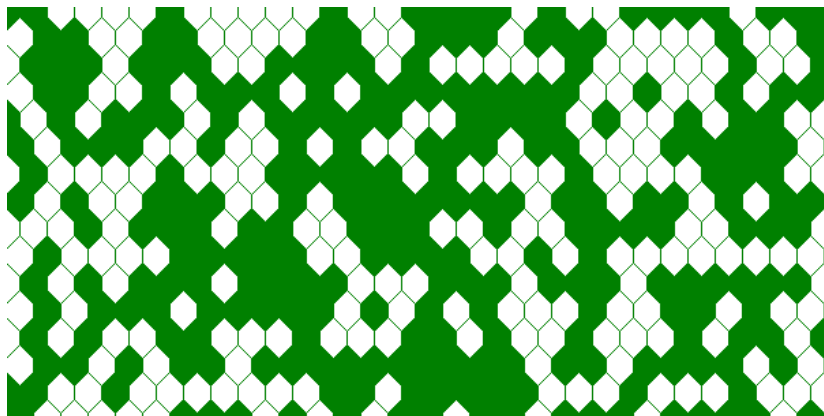


Probabilité ( ) = Proba ( ) = 1/2

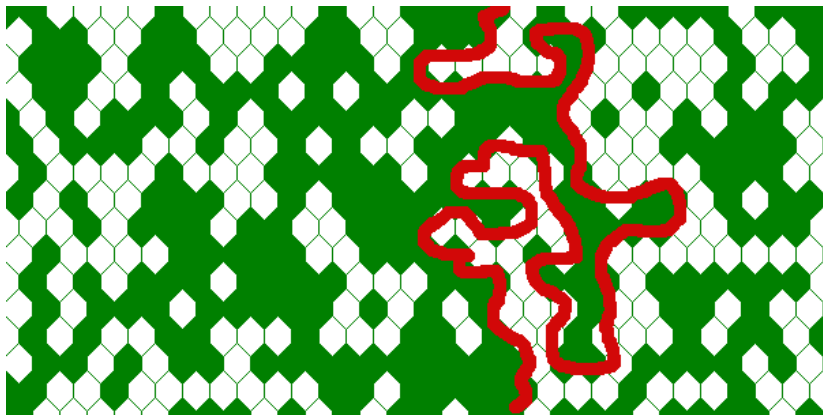




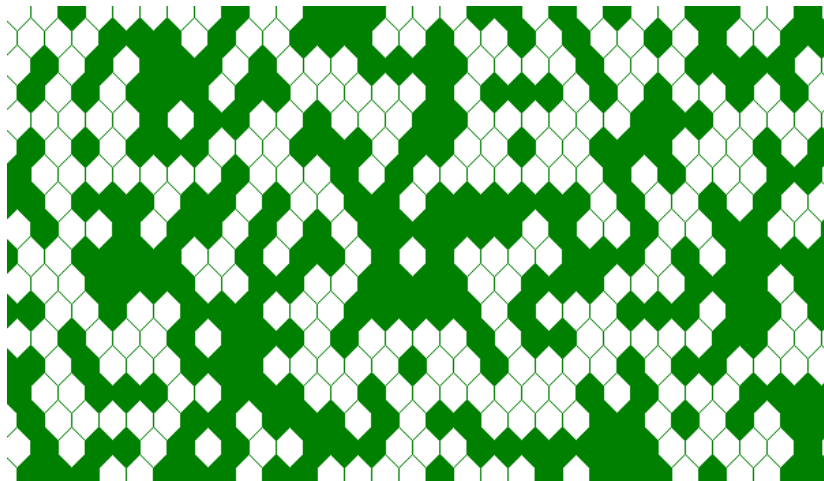
Les traversées de percolation ressemblent à des bords de rouille

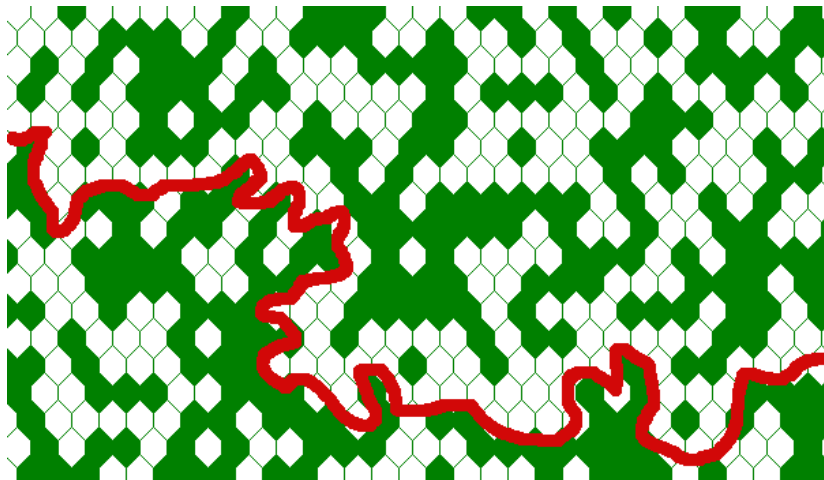


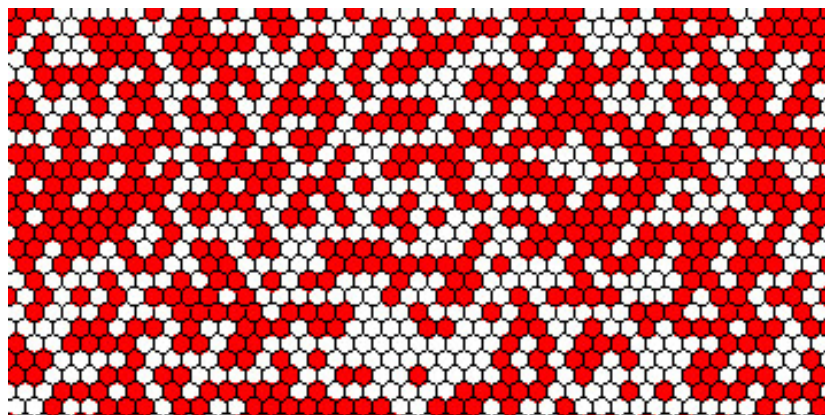
Rectangle 2 :1 (deux fois plus long que large)

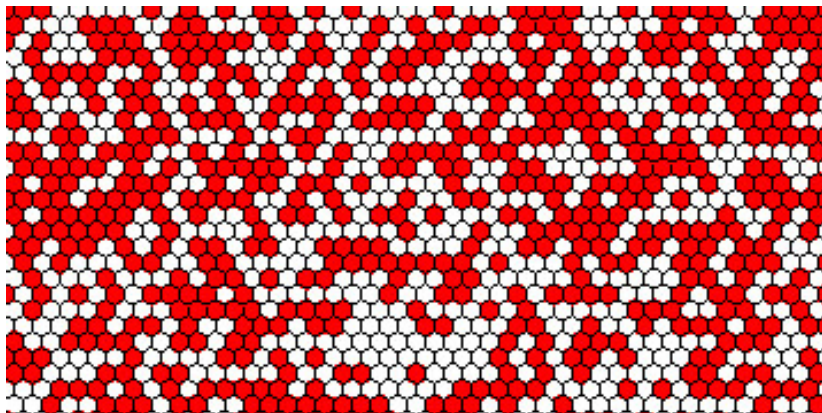




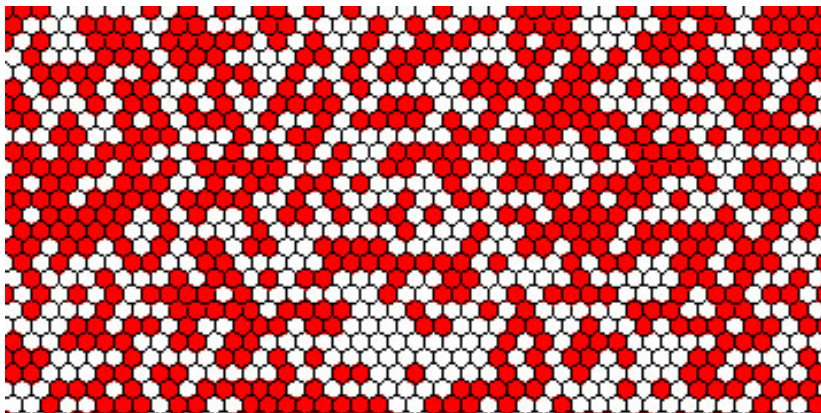




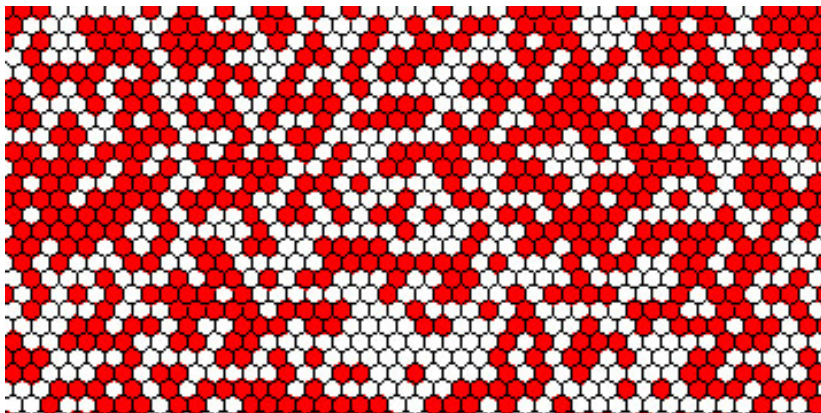




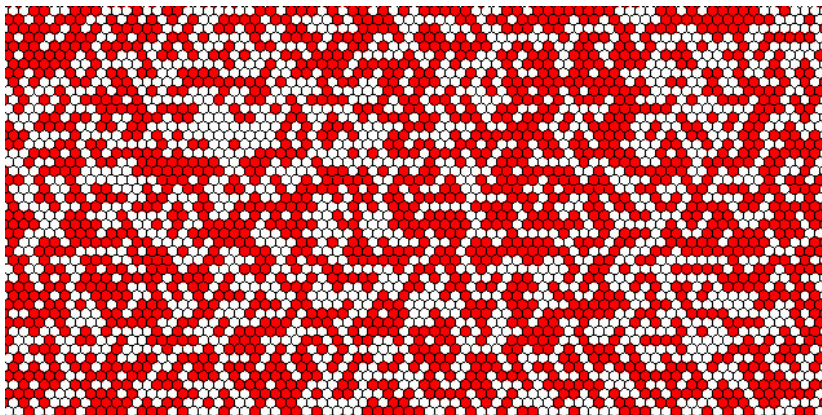
**Jeu 2 :1** : si Rouge passe verticalement, je gagne 1 euros.  
Si Blanc passe horizontalement, vous gagnez 1 euros.  
Jouez-vous avec moi ?



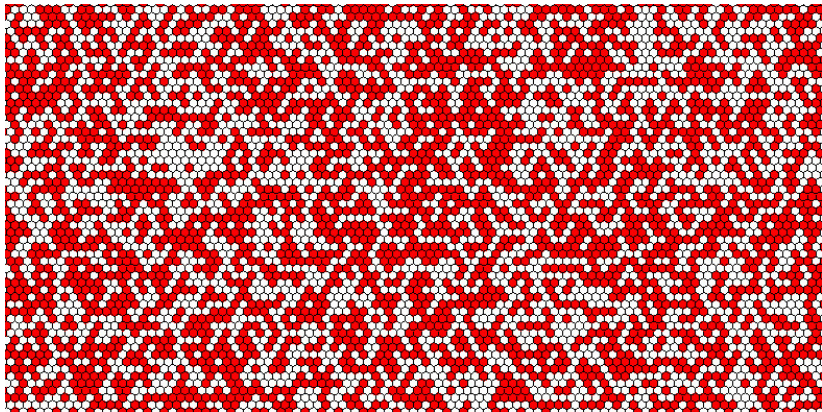
**Jeu 2 :1** : si Rouge passe verticalement, vous gagnez 1 euro.  
Si Blanc passe horizontalement, vous gagnez 15 euros.  
Jouez-vous avec moi ?



**Jeu 2 :1** : si Rouge passe verticalement, vous gagnez 1 euro.  
Si Blanc passe horizontalement, vous gagnez 2 euros.  
Jouez-vous avec moi ?

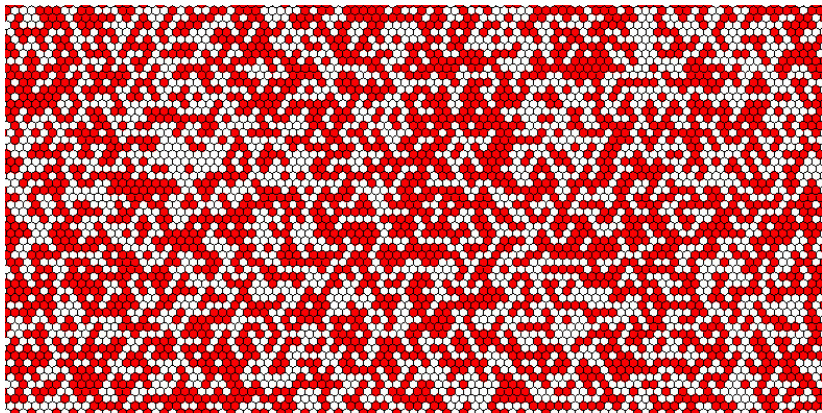


**Jeu 2 :1** : si Rouge passe verticalement, vous gagnez 1 euro.  
Si Blanc passe horizontalement, jusqu'à combien d'euros  
acceptez-vous de baisser votre pari ?



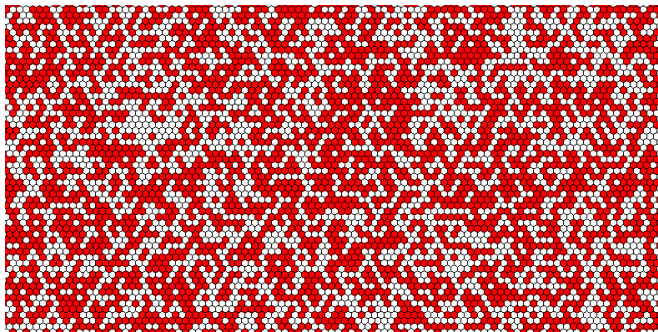
Quel est le jeu équitable?



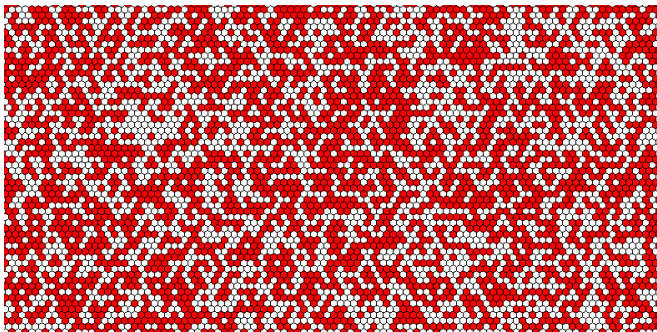


Quel est le jeu équitable?

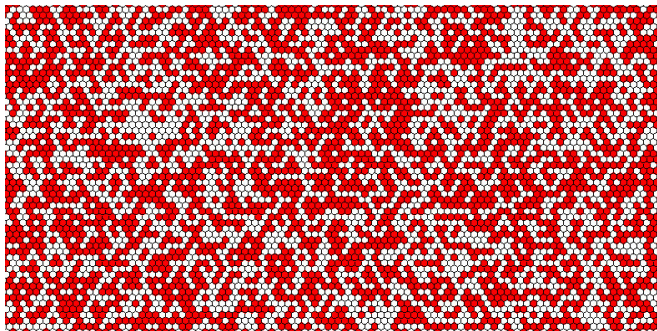
Quelle est la probabilité de traversée horizontale (ou verticale)?



**Théorème (Stanislas Smirnov 2000)** Quand la taille du rectangle  $2:1$  tend vers l'infini, le jeu équitable tend vers :

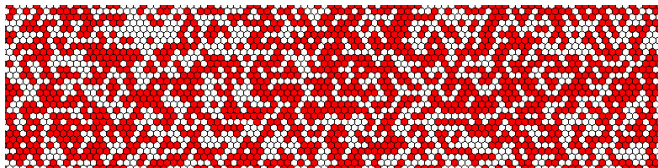


**Théorème (Stanislas Smirnov 2000)** Quand la taille du rectangle 2 :1 tend vers l'infini, le jeu équitable tend vers :  
1 euros pour Rouge vertical  
contre

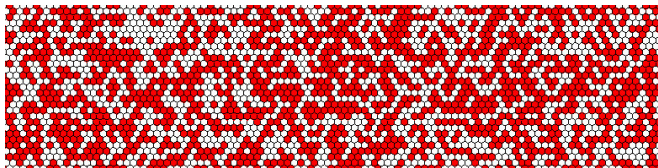


**Théorème (Stanislas Smirnov 2000)** Quand la taille du rectangle 2 :1 tend vers l'infini, le jeu équitable tend vers :

1 euros pour Rouge vertical  
contre  
4,74 euros pour Blanc horizontal.



**Théorème (Stanislas Smirnov 2000)** Pour un rectangle 4 :1,  
c'est 1 euro  
contre



**Théorème (Stanislas Smirnov 2000)** Pour un rectangle 4 :1,  
c'est 1 euro  
contre  
45,3 euros.

# Partie 3

## Lignes nodales et percolation



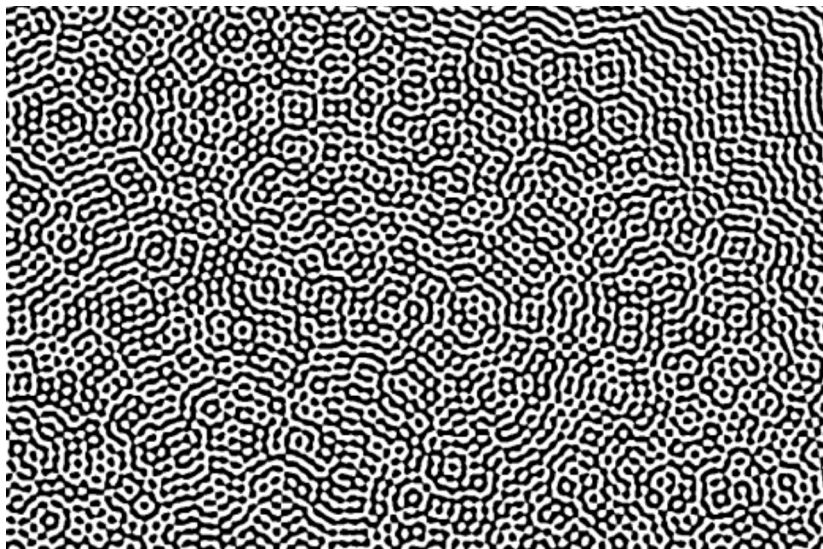


Noir vertical gagne contre blanc horizontal

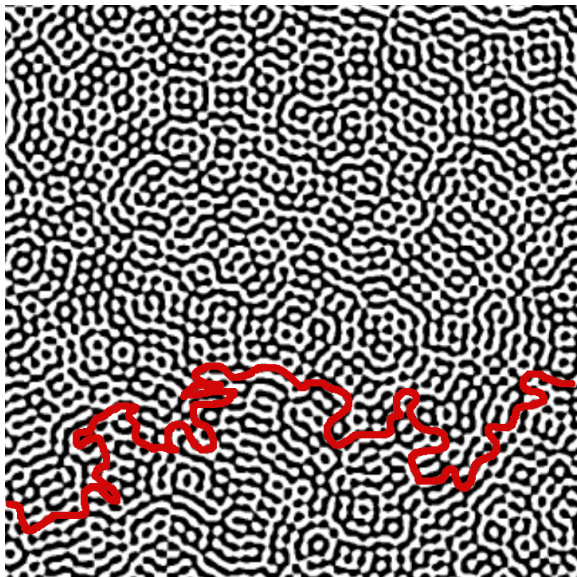




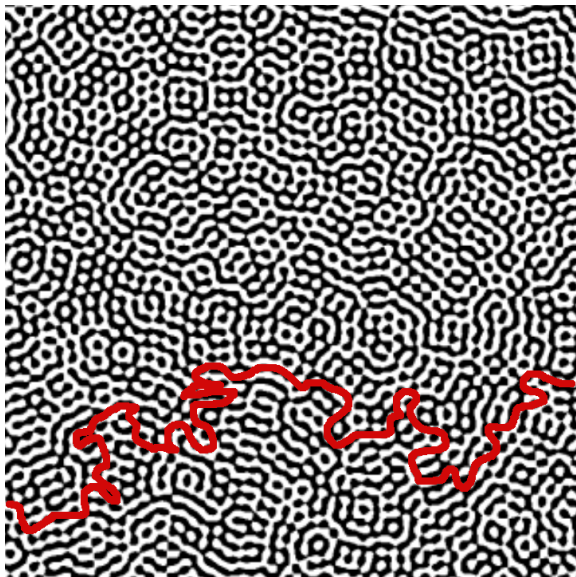
Noir vertical gagne contre blanc horizontal  
Quelle est le jeu équitable dans le cas d'un relief aléatoire?



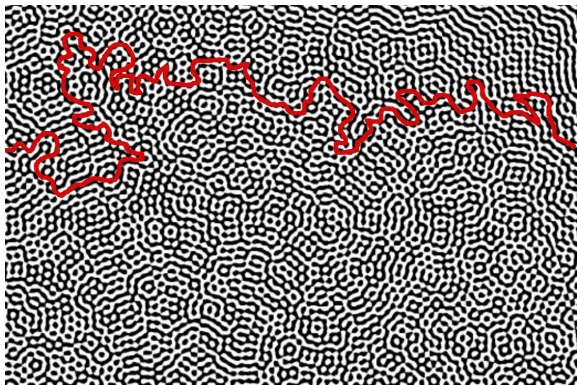
Une onde aléatoire



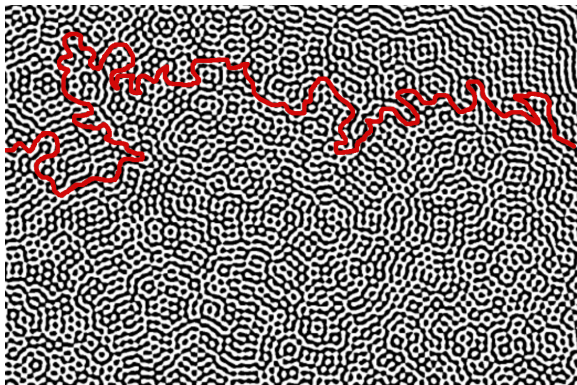
Le jeu équitable est 1 euro contre 1 euro



Le jeu équitable est 1 euro contre 1 euro  
Probabilité =  $1/2$  pour un carré



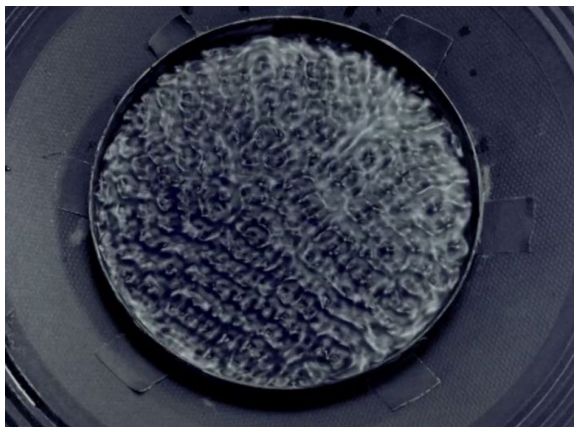
Probabilité pour un rectangle 2 :1 ?



Probabilité pour un rectangle 2 :1 ?

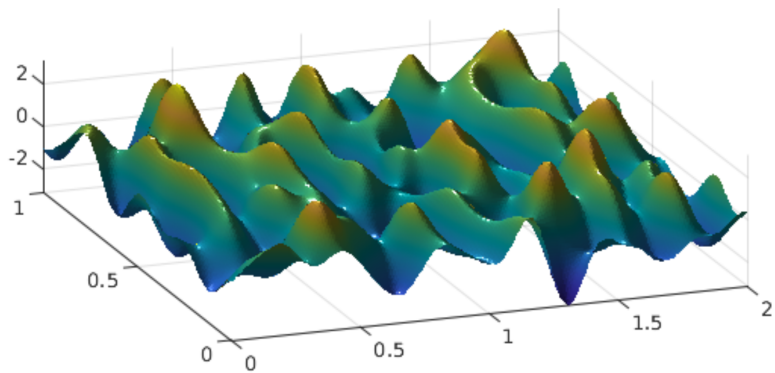
Problème ouvert!

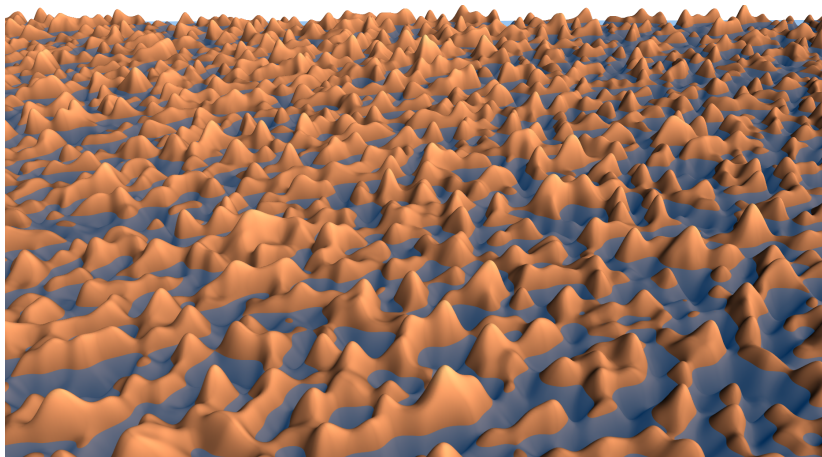
**Conjecture :** même réponse que pour la percolation hexagonale.



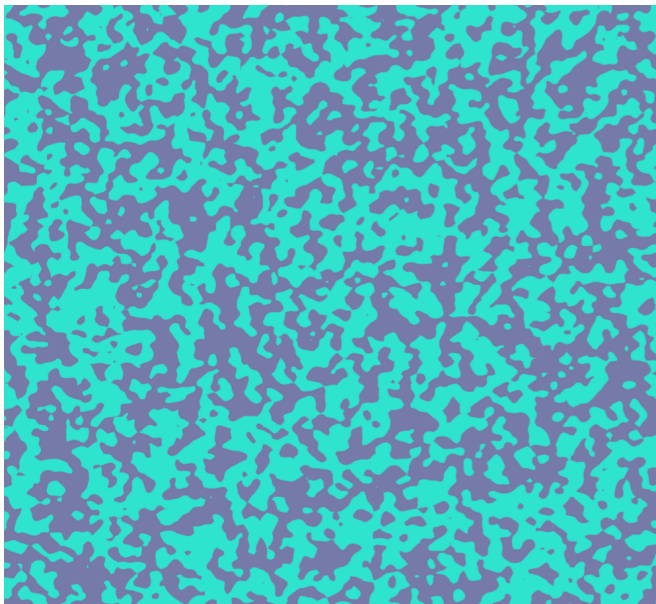




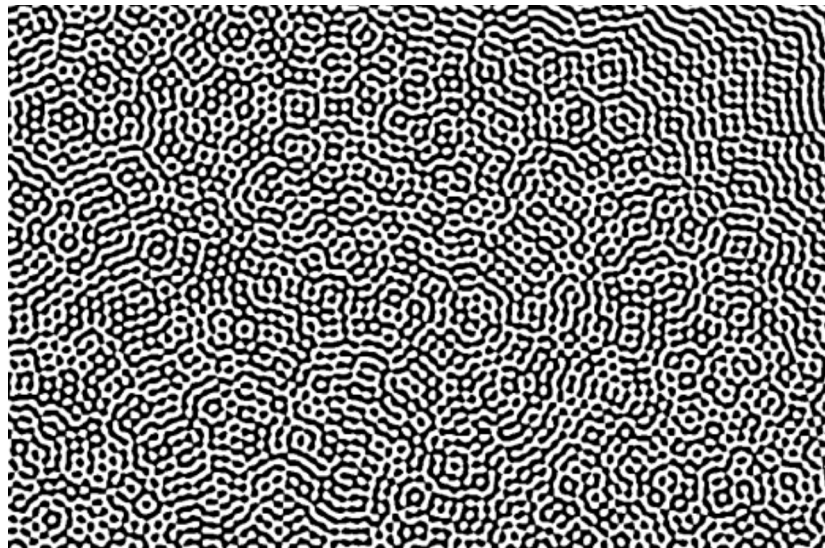


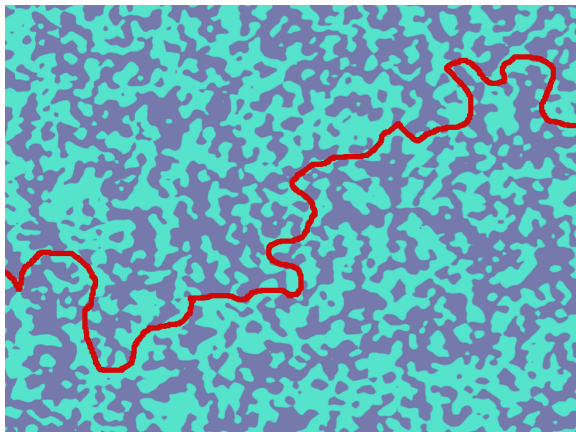


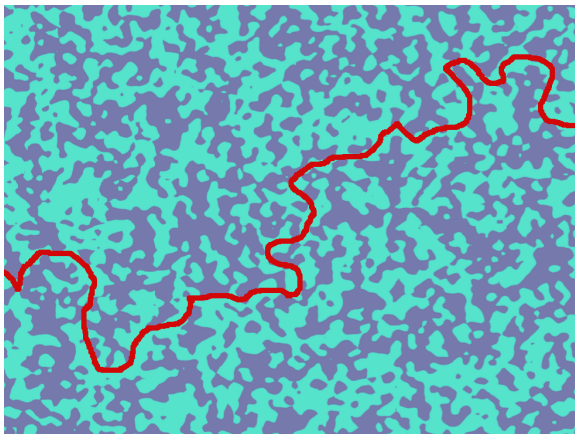
Relief aléatoire basé sur Bargmann-Fock (Alejandro Rivera)



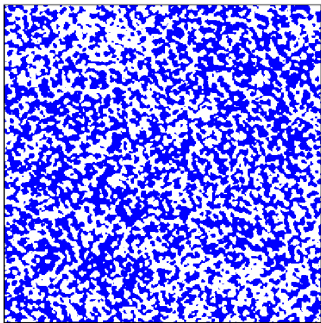
Le champ de *Bargmann-Fock*

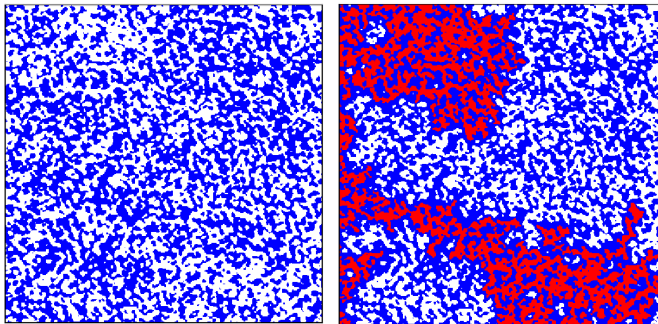






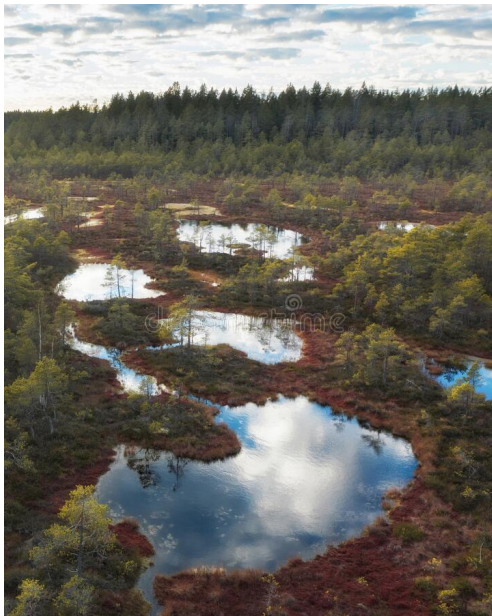
**Théorème** (Vincent Beffara et D.G. 2016) Si la taille du rectangle tend vers l'infini (mais reste 2 :1), et si le jeu équitable est de 1 euro contre  $x$  euros, alors  $x$  ne tend pas l'infini.



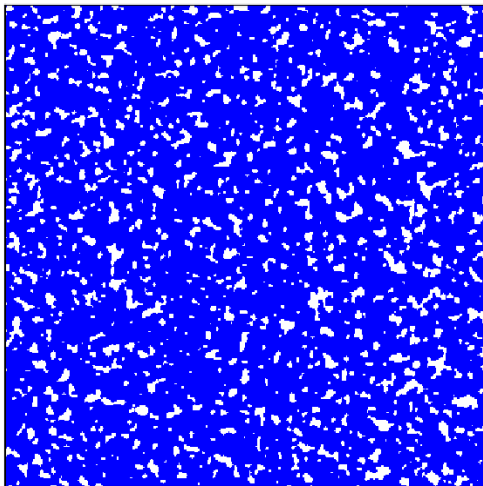


Niveau 0 : on passe à pied sans se mouiller de temps en temps





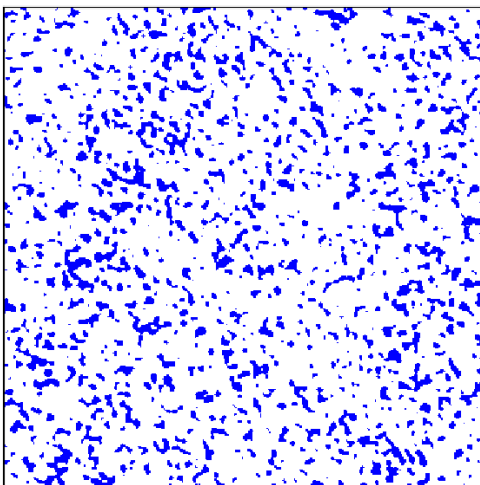
On passe à pied de temps en temps



Niveau 1 : on ne peut traverser à pied que très rarement



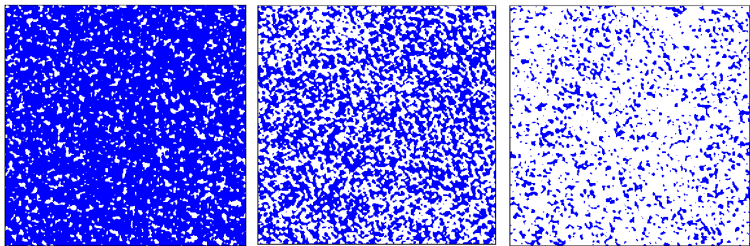
Très difficile de circuler sans barque



Niveau -1 : très facile de passer à pied

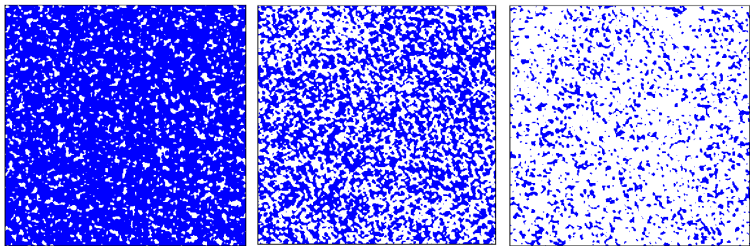


Très facile de circuler à pied



Niveau +1, Niveau 0, Niveau -1

**Théorème (Muirhead, Rivera, Vanneuville 2020)** Pour un niveau de mer légèrement strictement positif, il devient de plus en plus impossible de traverser à pied quand le carré devient grand. Pour un niveau de mer légèrement strictement négatif, ça devient de plus en plus facile.



Niveau +1, Niveau 0, Niveau -1

**Théorème (Muirhead, Rivera, Vanneuville 2020)** Pour un niveau de mer légèrement strictement positif, il devient de plus en plus impossible de traverser à pied quand le carré devient grand. Pour un niveau de mer légèrement strictement négatif, ça devient de plus en plus facile.

Ca ne dit rien quand la mer est à son niveau!



Niveaux -20 :





Niveaux -20 : Madmax Road Fury



Niveaux +20 :



Niveaux +20 : Waterworld

# Interlude

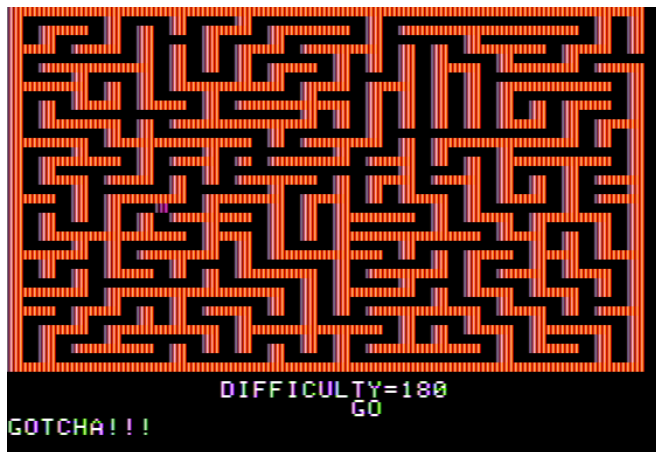
## Paysages aléatoires

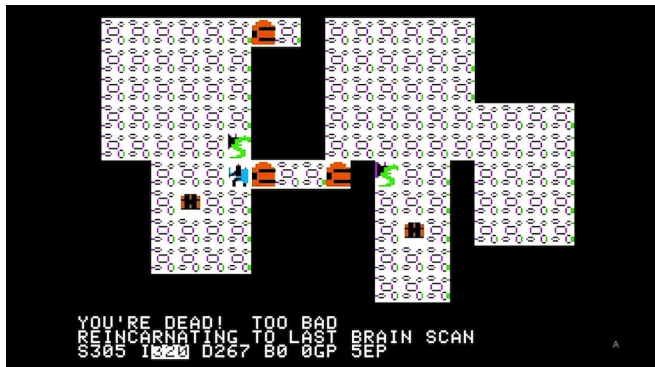


No Mans Sky

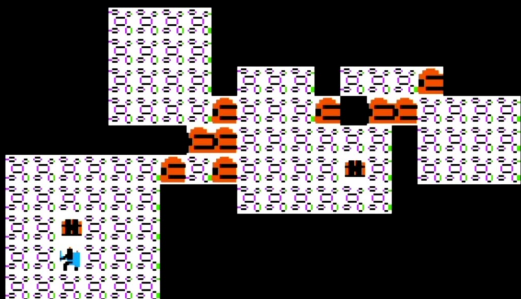


*Dragon Maze, 1978*





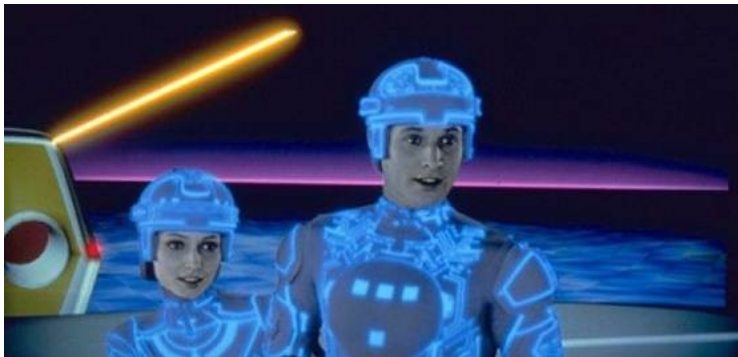
*Beneath Apple Manor, 1978*



POISON GAS!  
YOU TAKE 57 HITS.  
YOU FIND A POTION. DO YOU TAKE IT?\*

S322 I224 D241 B159 0GP 75EP





Tron 1982

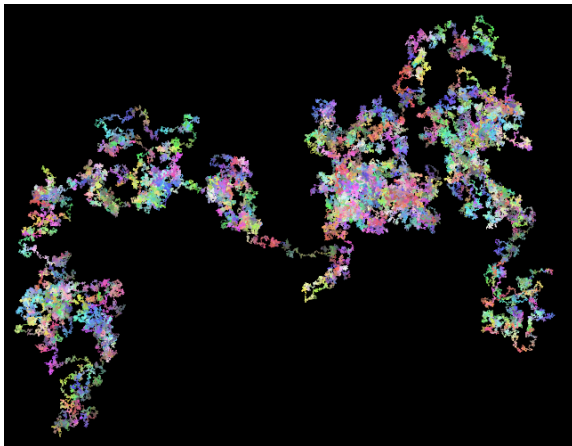


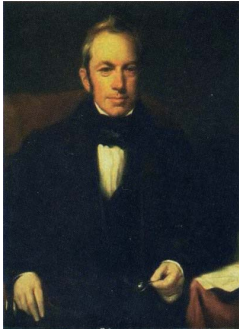
Montagne artificielle (Paul Bourke)



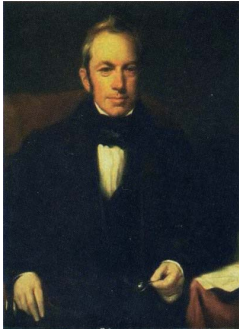
# Partie 4

## De l'agitation dans la percolation



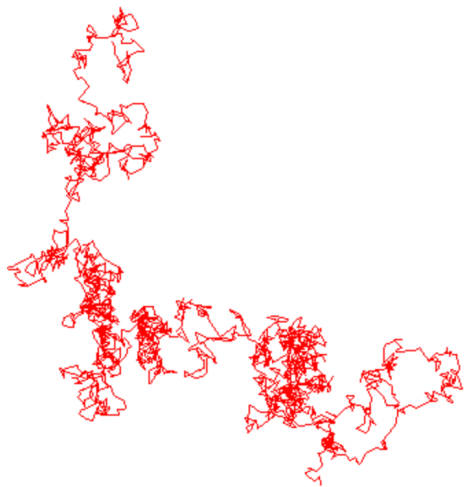


Robert Brown (1773 Montrose (Ecosse) - 1858 Londres)



Robert Brown (1773 Montrose (Ecosse) - 1858 Londres)

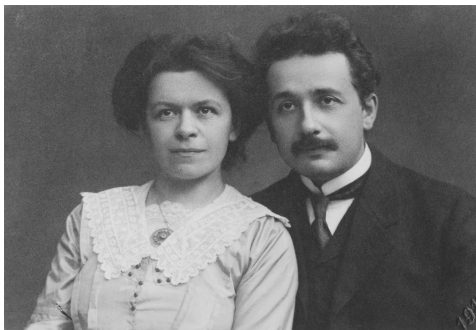
*Brownien gif*





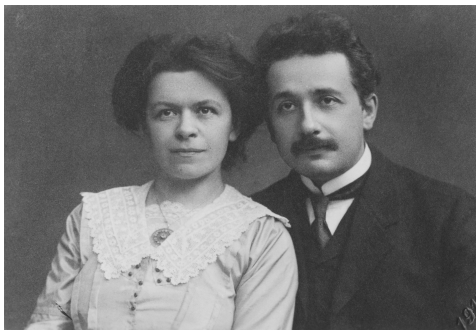


Mileva Einstein (1875 Titel (Serbie) - 1948 Zurich (Suisse)  
et Albert Einstein (1879 Ulm- 1955 Princeton)



Mileva Einstein (1875 Titel (Serbie) - 1948 Zurich (Suisse)  
et Albert Einstein (1879 Ulm- 1955 Princeton)

- ▶ 1905 Einstein donne une explication mathématique au mouvement brownien :



Mileva Einstein (1875 Titel (Serbie) - 1948 Zurich (Suisse)  
et Albert Einstein (1879 Ulm- 1955 Princeton)

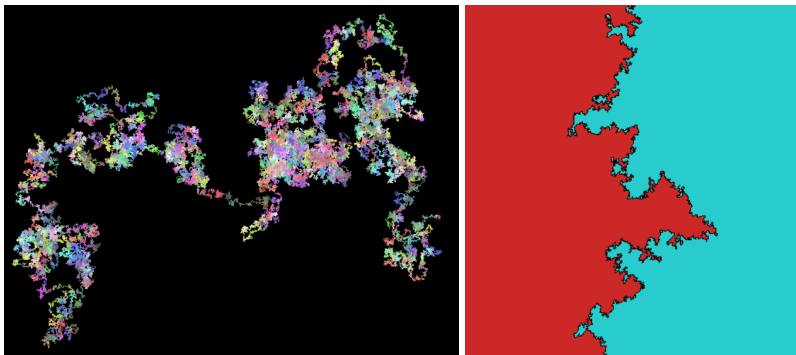
- ▶ 1905 Einstein donne une explication mathématique au mouvement brownien : c'est le résultat de très nombreux chocs aléatoires.

*Brownien math gif*

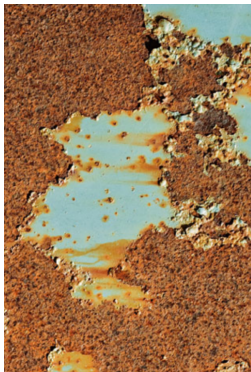
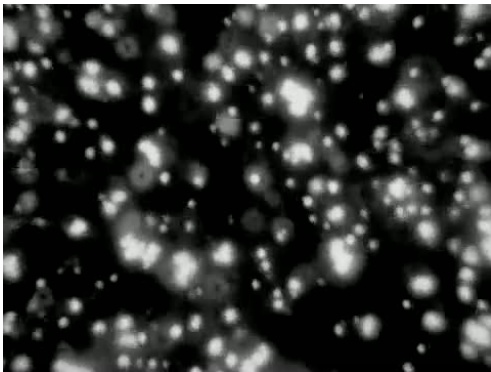


Oded Schramm et Stanislas Smirnov

**Théorème 2001** Les lignes de percolation sont des transformations de mouvement brownien.



**Théorème 2001** Les lignes de percolation sont des transformations de mouvement brownien.



Il y a un lien profond mathématique entre la rouille et le mouvement moléculaire !

Comment transformer une courbe en une autre ?



Jeanne d'Arc Girubuntu (Rwanda)



# Comment transformer une courbe en une autre ?



Jeanne d'Arc Girubuntu (Rwanda)

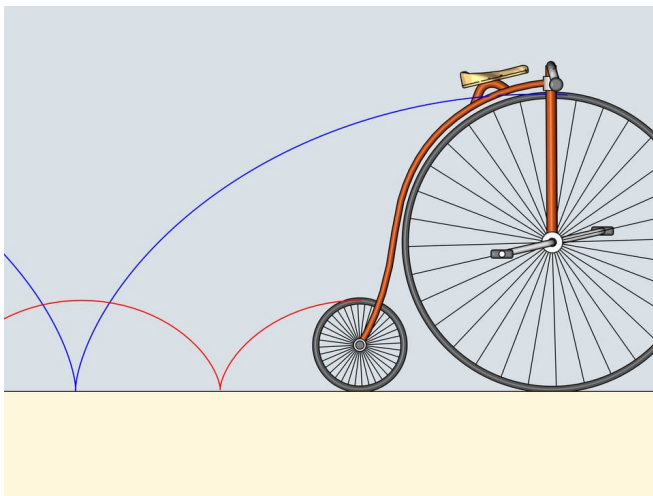
- ▶ Un point du pneu extérieur suit un cercle dans le référentiel de la cycliste.

# Comment transformer une courbe en une autre ?

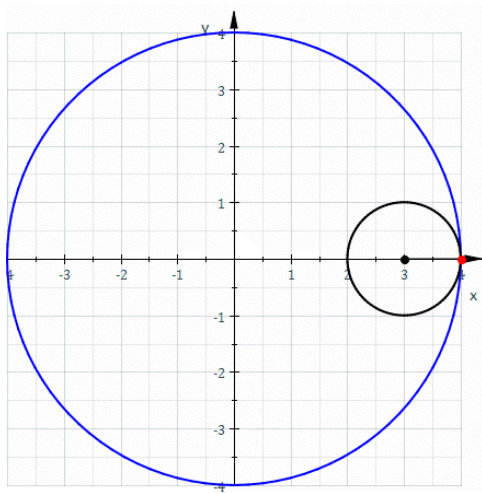


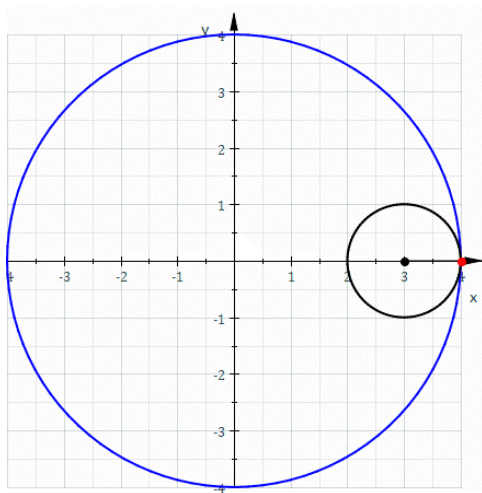
Jeanne d'Arc Girubuntu (Rwanda)

- ▶ Un point du pneu extérieur suit un cercle dans le référentiel de la cycliste.
- ▶ Dans le référentiel d'un spectateur, quelle trajectoire suit ce point ?

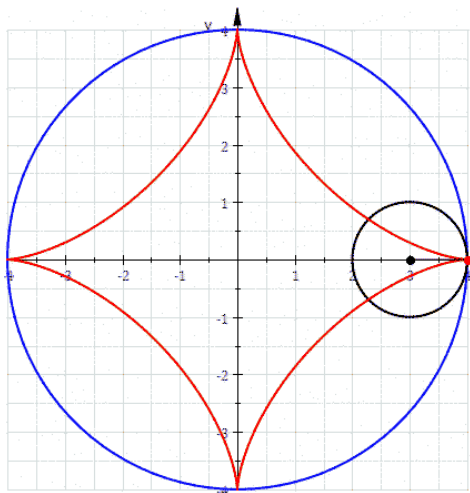


La cycloïde



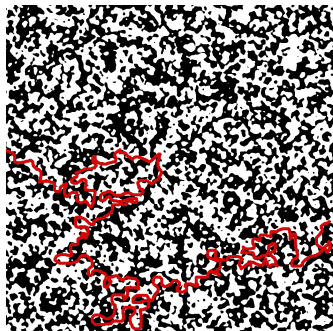
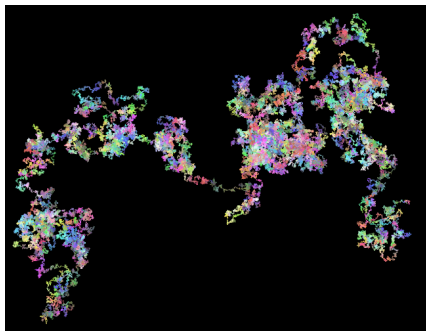


*Astro gif*



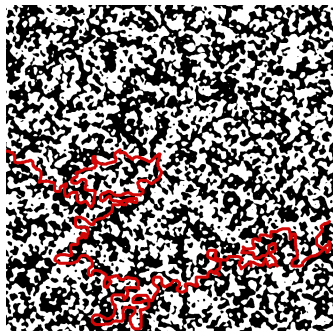
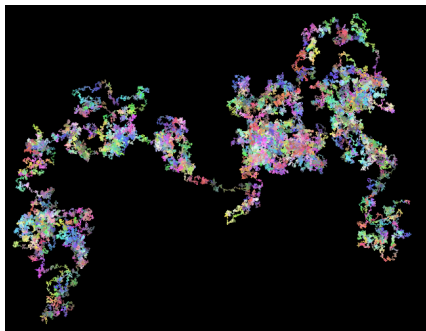
L'astroïde





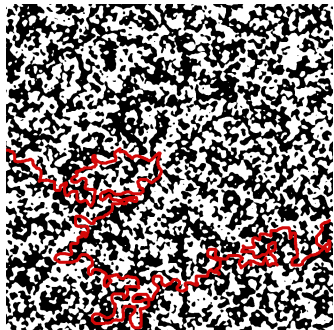
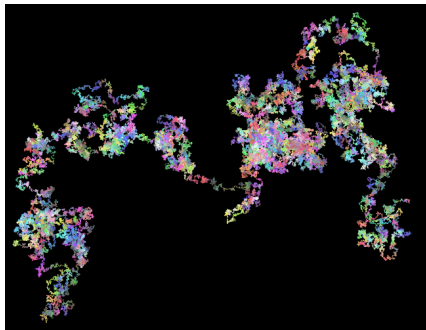
A-t-on la même relation entre les courbes nodales et le mouvement brownien ?





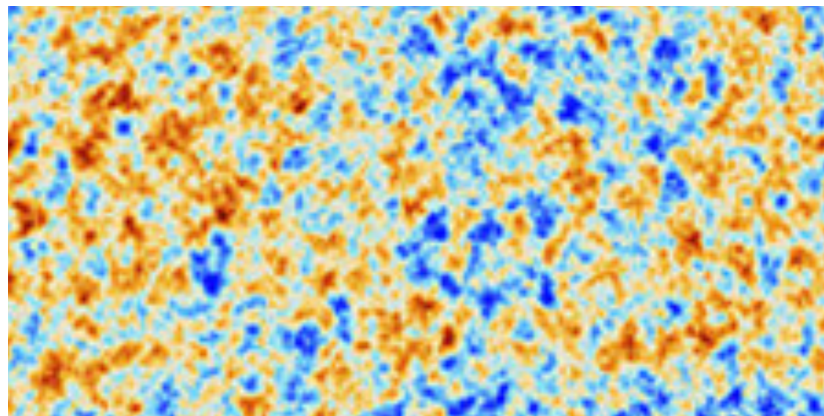
A-t-on la même relation entre les courbes nodales et le mouvement brownien ?

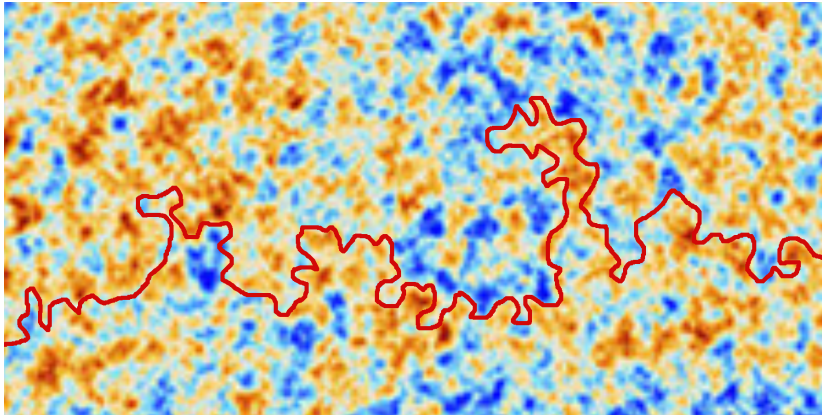
Beaucoup plus difficile :  
Pour les futur·e·s mathématicien·ne·s



A-t-on la même relation entre les courbes nodales et le mouvement brownien ?

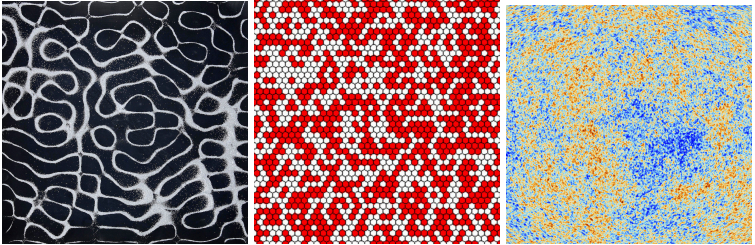
Beaucoup plus difficile :  
Pour les futur·e·s mathématicien·ne·s : vous !)

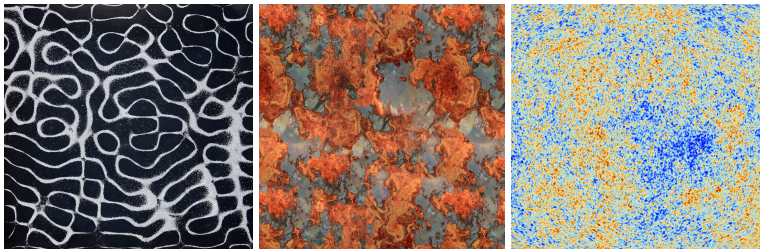




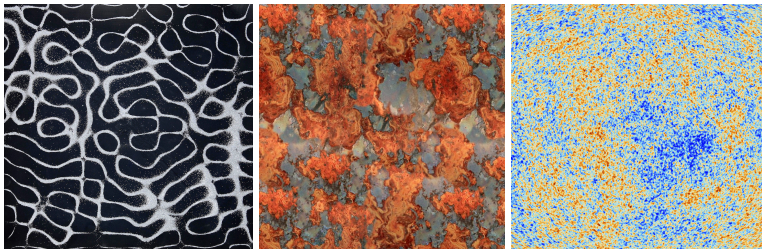
Du brownien dans le fond cosmique diffus ?

# Conclusion

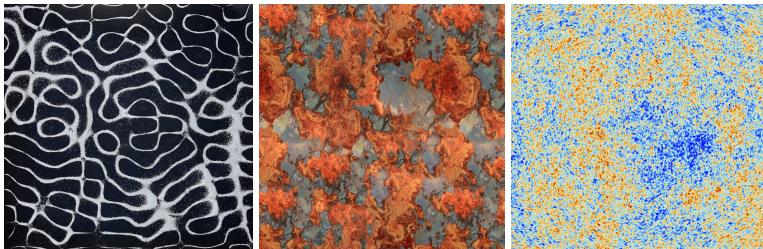




► Les mathématiques structurent le monde physique

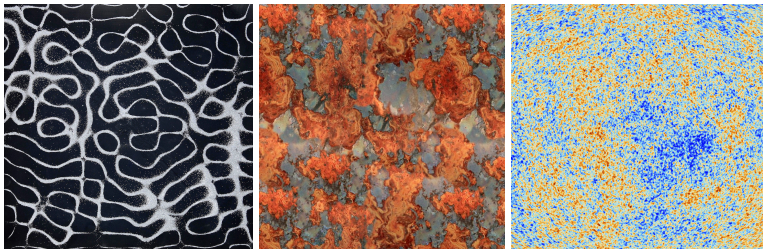


- ▶ Les mathématiques structurent le monde physique
- ▶ Un même objet mathématique peut survenir dans des phénomènes qui n'ont rien à voir a priori



- ▶ Les mathématiques structurent le monde physique
- ▶ Un même objet mathématique peut survenir dans des phénomènes qui n'ont rien à voir a priori
- ▶ Les mathématiques actuelles sont passionnantes proposent toujours plus de mystères à comprendre





- ▶ Les mathématiques structurent le monde physique
- ▶ Un même objet mathématique peut survenir dans des phénomènes qui n'ont rien à voir a priori
- ▶ Les mathématiques actuelles sont passionnantes proposent toujours plus de mystères à comprendre
- ▶ Les mathématiques sont faites pour les filles comme pour les garçons !

THANKS

The image features the word "THANKS" centered horizontally. Each letter is contained within a square tile. The tiles have a weathered, rusty, and aged appearance with various shades of brown, tan, and grey. The background is a dark, mottled, and textured surface, possibly stone or concrete, with some blueish-grey spots. The overall aesthetic is rustic and industrial.